

**APLIKASI *MATHEMATICA* UNTUK MASALAH TITIK TETAP
DARI FUNGSI DALAM SISTEM DINAMIK**

SKRIPSI

Disusun dalam Rangka Menyelesaikan Studi Strata I
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Universitas Negeri Semarang



Disusun Oleh:

Nama : Retno Priliyajati
NIM : 4150403504
Prodi : Matematika S1
Jurusan : Matematika

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG**

2007

ABSTRAK

***Retno Priliyajati (4150403504)**, *Aplikasi Mathematica untuk Masalah Titik Tetap dari Fungsi dalam Sistem Dinamik*. Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Semarang 2007.

Dalam masalah rekayasa di bidang fisika, biologi, matematika dan terapan-terapannya, sistem dinamik sering ditemui dalam bentuk matematis, dimana dalam menyelesaikan persamaan digunakan proses pengulangan fungsi. Proses pengulangan inilah yang dinamakan iterasi.

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*? dan apakah dengan *Mathematica* dapat mempermudah dan mempercepat dalam mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik?, khususnya sistem dinamik dengan fungsi satu variabel. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bagaimana mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*.

Penelitian ini dilakukan melalui tinjauan pustaka terhadap buku-buku atau literatur. Tinjauan pustaka tersebut, kemudian dibahas materi-materinya secara mendalam.

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa untuk mencari solusi titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica* dapat dicari dengan perintah **NRoots** ataupun **Solve**. Sedangkan untuk mencari titik tetap pada orbit dari fungsi dalam sistem dinamik dapat dicari dengan menggunakan perintah **Nest** ataupun **NestList**. Dari pembahasan juga dapat disimpulkan bahwa dengan menggunakan *Mathematica* lebih cepat dan lebih mudah dalam mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik.

Berdasarkan hasil kegiatan di atas pembahasan mengenai penggunaan *software Mathematica* untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik masih sangat terbatas sehingga perlu diadakan pengkajian yang lebih mendalam dalam pengkajian berikutnya, dan apakah *software Mathematica* ini dapat berlaku untuk masalah sistem dinamik yang lain, seperti masalah titik tetap pada fungsi trigonometri dan lain-lain. Bagi mahasiswa matematika yang tertarik untuk melakukan penelitian yang berkaitan dengan sistem dinamik, hendaknya dapat melakukan penelitian pada pokok bahasan sistem dinamik yang lain, sehingga dapat mengembangkan aplikasi *Mathematica* untuk masalah sistem dinamik.

Kata kunci: **iterasi, bifurkasi**

*Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNNES, NIM. 4150403504

HALAMAN PENGESAHAN

Skripsi dengan judul “**Aplikasi *Mathematica* untuk Masalah Titik Tetap dari Fungsi dalam Sistem Dinamik**”, telah dipertahankan di hadapan sidang Panitia Ujian Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang pada:

Hari : Senin

Tanggal : 13 Agustus 2007

Panitia Ujian

Ketua

Drs. Kasmadi Imam S., M.S.
NIP. 130781011

Pembimbing I

Drs. Supriyono, M.Si.
NIP. 130815345

Pembimbing II

Isnarto, S.Pd., M.Si.
NIP. 132092853

Sekretaris

Drs. Supriyono, M.Si.
NIP. 130815345

Anggota Penguji

1. Drs. Khaerun, M.Si.
NIP. 131813671

2. Drs. Supriyono, M.Si.
NIP. 130815345

3. Isnarto, S.Pd., M.Si.
NIP. 132092853

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

MOTTO

"Allah SWT tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kemampuannya"

(Q.S. Al Baqoroh: 286)

"Jadikanlah sabar dan sholat sebagai penolongmu" (Q.S. Al Baqoroh: 45)

"Imajinasi lebih berharga daripada sekedar ilmu pasti" (Albert Einstein)

"Disaat kita mau berusaha keberhasilan akan selalu menyertai kita".

PERSEMBAHAN

Puji Syukur kepada Allah SWT atas selesainya skripsi ini. Kuperuntukkan karya ini kepada:

- 1. Bapak dan ibu tercinta yang selalu memberikan kasih sayangnya.*
- 2. Kakak-kakakku dan saudara-saudaraku tercinta.*
- 3. Kekasihku tersayang.*
- 4. Guru-guruku serta dosen-dosenku yang telah memberikan pengetahuan serta ilmunya.*
- 5. Teman-teman Mat PRL angkatan Th. 2003.*
- 6. Risna Rozana, adik kosku yang sangat baik hati.*
- 7. Dian Nataria Oktaviani, sahabat baikku.*
- 8. Teman-teman KKV Limbangan tahun 2006.*
- 9. Teman-teman kosku yang telah memberikan warna dalam hidupku.*
- 10. Semua teman-temanku yang senantiasa membantuku.*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas limpahkan rahmat, petunjuk, dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat melaksanakan dan menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan judul "**Aplikasi *Mathematica* untuk Masalah Titik Tetap dari Fungsi dalam Sistem Dinamik**" sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Universitas Negeri Semarang.

Penyusunan skripsi ini dapat terwujud karena adanya bimbingan, bantuan, dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Soedijono Sastroatmodjo, M.Si., Rektor Universitas Negeri Semarang.
2. Drs. Kasmadi Imam S, M.S., Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Drs. Supriyono, M.Si., Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang dan Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, motivasi serta berkorban waktu, tenaga, maupun pikiran dalam proses penulisan skripsi ini.
4. Isnarto, S.Pd., M.Si., Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan motivasi serta berkorban waktu, tenaga, maupun pikiran dalam proses penulisan skripsi ini.
5. Ayah dan Ibu tercinta yang senantiasa mendoakan serta memberikan dorongan baik secara moral maupun spiritual.
6. Kakak-kakakku dan saudara-saudaraku tercinta.

7. Ravendra Arisandi Santiko, sahabat baikku yang selalu membantu dan memberi semangat serta motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Riza Arifudin, S.Pd. yang senantiasa membantu serta memberikan nasihat-nasihat yang sangat bermanfaat dalam penyelesaian skripsi ini.
9. David Mubarak, S.Si. petugas Laboratorium Matematika.
10. Teman-teman Matematika angkatan tahun 2003 yang aku sayangi.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis sadar dengan apa yang telah disusun dan disampaikan masih jauh dari sempurna dan banyak kekurangannya. Untuk itu, penulis menerima segala kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Semarang, Agustus

2007

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
ABSTRAK	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
MOTTO DAN PERSEMBAHAN	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	xi
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Permasalahan	3
C. Tujuan Penelitian	3
D. Manfaat Penelitian	4
E. Sistematika Penulisan Skripsi	4
BAB II LANDASAN TEORI	6
A. Pengertian Sistem Dinamik, iterasi, dan Bifurkasi	6
B. Sistem Dinamik	6
C. Titik Tetap	7
D. Orbit	9
E. Iterasi	16
F. Menemukan Nilai Iterasi yang Terakhir	18

G. Tabel Iterasi	19
H. Mengontrol Ketepatan Dari Perhitungan	20
I. Membuat Grafik Fungsi Iterasi	22
J. Analisis Grafik	23
K. Data dan Informasi	25
L. Kerangka Berfikir	26
BAB III METODE PENELITIAN	28
A. Menemukan Masalah	28
B. Merumuskan Masalah	28
C. Studi Pustaka	28
D. Analisis dan Pemecahan Masalah	29
E. Penarikan Kesimpulan	29
BAB IV PEMBAHASAN	30
A. Teorema Nilai Rata-rata Untuk Titik Tetap	30
B. Titik Tetap pada Fungsi Real	34
C. Soal-soal yang Dapat Diselesaikan Secara Manual dan Diselesaikan dengan Menggunakan <i>Mathematica</i>	36
D. Titik Tetap pada Orbit	39
E. Contoh Soal yang Sulit Diselesaikan Secara Manual	44
BAB V PENUTUP	58
A. Simpulan	58
B. Saran	58
DAFTAR PUSTAKA	59

LAMPIRAN	60
----------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik Fungsi Iterasi	23
Gambar 2.2	Analisis Grafik	25
Gambar 4.1	Satu Titik Singgung Antara Titik A dan B	30
Gambar 4.2	Dua Titik Singgung Antara Titik A dan B	31
Gambar 4.3	Grafik Teorema 4.1	32

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	:	Menemukan Nilai Iterasi yang Terakhir	60
Lampiran 2	:	Tabel Iterasi	61
Lampiran 3	:	Mengontrol Ketepatan dari Perhitungan	62
Lampiran 4	:	Membuat Grafik Fungsi Iterasi	63
Lampiran 5	:	Analisis Grafik	64
Lampiran 6	:	Contoh 4.3, Contoh 4.4, dan Contoh 4.5	65
Lampiran 7	:	Contoh 4.6, Contoh 4.7, dan Contoh 4.8	66
Lampiran 8	:	Contoh 4.9	67
Lampiran 9	:	Contoh 4.10	68
Lampiran 10	:	Contoh 4.11	69
Lampiran 11	:	Contoh 4.12	70
Lampiran 12	:	Contoh 4.13	71
Lampiran 13	:	Contoh 4.14	72

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dalam era globalisasi saat ini, ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat pesat, begitu juga dengan perkembangan matematika. Matematika pada dasarnya merupakan alat, sarana atau pelayan ilmu lain. Hal ini tidak dapat dipungkiri dengan munculnya berbagai aplikasi matematika, baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam disiplin ilmu yang membutuhkan banyak perhitungan. Berbagai masalah dirasakan lebih mudah dimengerti dengan pendekatan matematika, sebagai dasar dari berbagai disiplin ilmu.

Dalam masalah rekayasa di bidang fisika, biologi, matematika dan terapan-terapannya, sistem dinamik sering ditemui dalam bentuk matematis, dimana dalam menyelesaikan persamaan digunakan proses pengulangan fungsi. Dalam sistem dinamik proses pengulangan merupakan aplikasi dari sebuah fungsi, dan proses pengulangan inilah yang dinamakan iterasi.

Dalam mengerjakan soal kebanyakan dari mahasiswa menggunakan cara manual, padahal dalam sistem dinamik terdapat soal yang bila diselesaikan secara manual sangat sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan, tetapi apabila menggunakan *Mathematica* maka masalah sistem dinamik tersebut dapat dengan mudah diselesaikan. Semua ini seiring dengan kemajuan teknologi, komputer merupakan produk teknologi yang mampu

memecahkan masalah, bukan hanya kemampuannya dalam menyimpan dan memberikan informasi tetapi juga dalam segi perhitungan matematika.

Untuk mendapat solusi masalah sistem dinamik tersebut, dapat digunakan dengan perhitungan manual, *Mathematica*, dan lain-lain. Semua metode untuk perhitungan dalam masalah sistem dinamik baik secara manual, dengan *Maple* dan *Pascal* adalah yang paling awal dikembangkan dan mungkin paling dikenal baik hingga sekarang.

Program *Mathematica* pada masa perkuliahan jurusan matematika semester 5 belum pernah dikaji secara mendalam, oleh karena itu penulis tertarik mengangkat materi aplikasi *Mathematica* untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik untuk dijadikan judul skripsi. Selain *Mathematica* belum pernah dikaji secara mendalam dalam perkuliahan, dengan *Mathematica* juga lebih mudah untuk mencari solusi masalah sistem dinamik karena *Mathematica* memang dirancang khusus untuk mencari dan menyelesaikan masalah sistem dinamik walaupun dengan program lain masalah sistem dinamik juga dapat diselesaikan, tetapi butuh waktu lama untuk mengerjakannya.

Dalam skripsi ini dikaji sistem dinamik dengan fungsi satu variabel baik untuk fungsi iterasi, grafik, analisis grafik, maupun bifurkasi serta aplikasinya dalam *Mathematica*.

Dalam menentukan solusi atau penyelesaian suatu masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik, keberadaan alat bantu sangat dibutuhkan untuk mempermudah menyelesaikan secara cepat dan tepat. Dewasa ini

perkembangan teknologi komputer dan perangkat lunak lainnya dirasakan sangat pesat, khususnya di bidang pendidikan. Salah satu perangkat lunak (*software*) berbasis matematika yang dikembangkan untuk kepentingan ilmu pengetahuan adalah *Mathematica*. *Mathematica* belum banyak digunakan oleh para ilmuwan atau mahasiswa untuk membantu menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika, padahal *Mathematica* adalah perangkat lunak yang lengkap dan komunikatif. Persoalan yang dapat diselesaikan dengan *Mathematica* merupakan persoalan matematika murni, seperti sistem dinamik. Dengan alasan di atas penulis tertarik untuk meneliti tentang aplikasi *Mathematica* untuk sistem dinamik satu variabel, khususnya masalah titik tetap dari suatu fungsi.

Dari uraian di atas maka penulis mengangkat “**Aplikasi *Mathematica* untuk Masalah Titik Tetap dari Fungsi dalam Sistem Dinamik**” sebagai judul skripsi.

B. Permasalahan

Dari latar belakang di atas, maka permasalahan yang timbul adalah:

1. Bagaimana mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*?
2. Apakah dengan *Mathematica* dapat mempermudah dan mempercepat dalam mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik?

C. Tujuan Penelitian

Mengetahui bagaimana mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*.

D. Manfaat Penelitian

Untuk menambah wawasan dan pengetahuan tentang sistem dinamik khususnya sistem dinamik dengan fungsi satu variabel.

E. Sistematika Penulisan Skripsi

Penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir. Bagian awal memuat halaman judul, abstrak, halaman pengesahan, kata pengantar, daftar isi, dan daftar lampiran. Bagian isi terbagi atas 5 bab, yaitu:

BAB I : PENDAHULUAN

Membahas tentang pemilihan judul, permasalahan yang diangkat, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB II : LANDASAN TEORI

Mencakup pembahasan materi-materi pendukung yang digunakan dalam pemecahan masalah.

BAB III : METODE PENELITIAN

Memaparkan tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini, meliputi menentukan masalah, perumusan masalah, studi pustak, analisis dan pemecahan masalah, penarikan simpulan.

BAB IV : PEMBAHASAN

Membahas tentang hasil-hasil penelitian yang sesuai dengan permasalahan yang dirumuskan dalam BAB I yaitu tentang solusi masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica* dan perbedaan pengerjaan secara manual dan dengan menggunakan *Mathematica*.

BAB V : PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang ditujukan untuk pembaca umumnya dan bagi penulis sendiri khususnya.

Bagian akhir memuat daftar pustaka sebagai acuan penulisan dan lampiran-lampiran yang mendukung kelengkapan skripsi, seperti *print out* program dan gambarnya.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Pengertian Sistem Dinamik, Iterasi, dan Bifurkasi

Sistem diartikan fungsi dan dinamik adalah gerak, jadi sistem dinamik artinya adalah gerak dari fungsi. Dalam menyelesaikan sistem dinamik digunakan proses pengulangan fungsi, dan proses pengulangan inilah yang dinamakan iterasi. Sedangkan bifurkasi adalah suatu proses perubahan, dalam hal ini perubahan dinamik fungsi Q_c terhadap parameter c .

B. Sistem Dinamik

Pendekatan kualitatif adalah titik pandang utama yang digunakan dalam teori umum pada sistem dinamik. Sistem dinamik mempunyai 2 komponen: ruang fasa (ruang pusat), yang terdiri dari semua kemungkinan 'keadaan' pada sistem (untuk besaran skalar pada garis R , meliputi semua kemungkinan nilai x), dan 'dinamik' yang digambarkan bagaimana keadaan berubah pada saat itu (untuk kata dinamik ditentukan dengan solusi persamaan $x = f(x)$).

Dengan meningkatnya teknologi komputer diperoleh keuntungan yang sangat besar dalam teori sistem dinamik pada akhir-akhir ini, dan teori ini mendapat perhatian pada tahun 1980-an dibawah media persahabatan '*chaos*' bonner (Robinson, 2004:56).

Secara numerik telah diselidiki kerumitan dari persamaan sistem dinamik. Sama halnya dengan menguji perilaku grafik iterasi logistik. Semua

ini merupakan masalah yang solusinya di luar teknik yang disajikan dalam teori sistem dinamik. Teori ini memperoleh dukungan yang besar pada tahun 80-an, ketika dipopulerkan dibawah bendera *media-friendly* “Chaos”. Salah satunya yang populer adalah *Making A New Science* yang ditulis oleh J. Gleick. Sementara penemu awal teori ini menyajikannya dalam *The Essence of Chaos* yang ditulis oleh E. N. Lorente (Robinson, 2004:374).

C. Titik Tetap

Definisi 2.1

Misal $I \subseteq \mathbb{R}$, $F: I \rightarrow I$ fungsi. Titik $x_0 \in I$ disebut titik tetap apabila $F(x_0) = x_0$.

Karena $x_0 \in I$ titik tetap dengan $F(x_0) = x_0$, maka dengan demikian

$$\begin{aligned} F^2(x_0) &= F(F(x_0)) \\ &= F(x_0) \\ &= x_0, \text{ dan} \end{aligned}$$

$$F^2(x_0) = x_0$$

Contoh 2.1

Misal $F(x) = x^3$ dan $x \in \mathbb{R}$. Maka titik-titik tetap dari fungsi tersebut adalah:

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^3$ adalah $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, dan $x_3 = 1$.

Contoh 2.2

Misal $F(x) = x^2 - x - 4$ dan $x \in \mathbb{R}$. Maka titik-titik tetap dari fungsi tersebut adalah:

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \\ &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-16)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4(5)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{dan} \quad x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2 - x - 4$ adalah $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ dan $x_2 = 2 - \sqrt{5}$.

D. Orbit

Definisi 2.2

Misalkan $F: I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, dan $x_0 \in I$. Orbit dari x_0 oleh F didefinisikan sebagai barisan $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), x_3 = F^3(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0), \dots$. Dalam hal ini, x_0 disebut sebagai benih dari orbit, sedangkan x_i dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ disebut elemen dari orbit.

Contoh 2.3

Misal $F(x) = x^2$ dan $x_0 = \frac{1}{2}$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$= F(F(x_0))$$

$$= F\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}$$

$$x_3 = F^3(x_0)$$

$$= F(F(F(x_0)))$$

$$= F\left(F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= F\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{256}, \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi orbit dari $x_0 = \frac{1}{2}$ oleh $F(x) = x^2$ adalah barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{256}, \dots$

Contoh 2.4

Misal $F(x) = x^2 + 1$ dan $x_0 = 0$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(0)$$

$$= 0^2 + 1$$

$$= 1$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$= F(F(x_0))$$

$$= F(1)$$

$$= (1)^2 + 1$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= F^3(x_0) \\
&= F(F(F(x_0))) \\
&= F(F(1)) \\
&= F(2) \\
&= (2)^2 + 1 \\
&= 4 + 1 \\
&= 5, \text{ dan seterusnya.}
\end{aligned}$$

Jadi orbit dari $x_0 = 0$ oleh $F(x) = x^2 + 1$ adalah barisan $0, 1, 2, 5, \dots$

Definisi 2.3

Misalkan $F: I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, dan $x_0 \in I$. Orbit dari x_0 oleh fungsi F disebut orbit periodik apabila orbit dari x_0 berupa barisan pengulangan $x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), \dots, F^{n-1}(x_0), x_0, \dots$ dengan n suatu bilangan asli. Dalam hal ini n disebut sebagai periode prima dari orbit.

Contoh 2.5

Jika $F(x) = x^2 - 1$ dan $x_0 = 0$ maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= F(x_0) \\
&= F(0) \\
&= 0^2 - 1 \\
&= -1 \\
x_2 &= F^2(x_0) \\
&= F(F(x_0)) \\
&= F(-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^2 - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0 \\
x_3 &= F^3(x_0) \\
&= F(F(F(x_0))) \\
&= F(F(-1)) \\
&= F(0) \\
&= 0^2 - 1 \\
&= -1, \text{ dan seterusnya.}
\end{aligned}$$

Jadi orbit dari benih $x_0 = 0$ oleh $F(x) = x^2 - 1$ adalah barisan $0, -1, 0, -1, \dots$

Orbit tersebut merupakan orbit periodik dengan periode prima 2, sedangkan 0 dan -1 adalah titik tetap.

Sebuah titik x_0 disebut *eventually periodic* jika x_0 itu sendiri bukan periodik, tetapi beberapa titik pada orbit dari x_0 adalah periodik.

Contoh 2.6

Misal $F(x) = x^2 - 1$ dan $x_0 = 1$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
x_1 &= F(x_0) \\
&= F(1) \\
&= 1^2 - 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= F^2(x_0) \\ &= F(F(x_0)) \\ &= F(0) \\ &= (0)^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= F^3(x_0) \\ &= F(F(F(x_0))) \\ &= F(F(0)) \\ &= F(-1) \\ &= (-1)^2 - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_4 &= F^4(x_0) \\ &= F(F(F(F(x_0)))) \\ &= F(F(F(0))) \\ &= F(F(-1)) \\ &= F(0) \\ &= (0)^2 - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1, \text{ dan seterusnya.}\end{aligned}$$

Jadi orbit dari benih $x_0 = 1$ oleh $F(x) = x^2 - 1$ adalah barisan $1, 0, -1, 0, -1, \dots$

Titik $x_0 = 1$ disebut *eventually periodic* dengan 0 dan -1 adalah titik tetap.

Definisi 2.4

Misalkan $F: I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, dan $x_0 \in I$. Orbit dari x_0 oleh fungsi F disebut orbit periodik apabila orbit dari x_0 merupakan orbit periodik dengan periode prima satu. Dengan kata lain, orbit dari x_0 oleh fungsi F disebut orbit tetap jika orbit dari x_0 merupakan barisan konstan x_0, x_0, \dots .

Contoh 2.7

Misal $F(x) = x^2 - 2$ dan $x_0 = 2$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(2)$$

$$= (2)^2 - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$= F(F(x_0))$$

$$= F(2)$$

$$= (2)^2 - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2$$

$$x_3 = F^3(x_0)$$

$$= F(F(F(x_0)))$$

$$= F(F(2))$$

$$= F(2)$$

$$= (2)^2 - 2$$

$$= 4 - 2$$

= 2, dan seterusnya.

Jadi orbit dari benih $x_0 = 2$ oleh $F(x) = x^2 - 2$ adalah barisan $2, 2, 2, 2, \dots$

Orbit tersebut merupakan orbit tetap dengan 2 adalah titik tetap.

Sebuah titik x_0 disebut *eventually fixed* jika x_0 itu sendiri bukan tetap, tetapi beberapa titik pada orbit dari x_0 adalah tetap.

Contoh 2.8

Misal $F(x) = x^2$ dan $x_0 = -1$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(-1)$$

$$= (-1)^2$$

$$= 1$$

$$x_2 = F^2(x_0)$$

$$= F(F(x_0))$$

$$= F(1)$$

$$= (1)^2$$

$$= 1$$

$$x_3 = F^3(x_0)$$

$$= F(F(F(x_0)))$$

$$= F(F(1))$$

$$= F(1)$$

$$\begin{aligned}
&= (1)^2 \\
&= 1 \\
x_4 &= F^4(x_0) \\
&= F(F(F(F(x_0)))) \\
&= F(F(F(1))) \\
&= F(F(1)) \\
&= F(1) \\
&= (1)^2 \\
&= 1, \text{ dan seterusnya.}
\end{aligned}$$

Jadi orbit dari benih $x_0 = -1$ oleh $F(x) = x^2 - 1$ adalah barisan $-1, 1, 1, 1, 1, \dots$

Titik $x_0 = -1$ disebut *eventually fixed* dan 1 adalah titik tetap.

E. Iterasi

Definisi 2.5

Misalkan $F: I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, iterasi ke- n dari F ditulis $F^n(x)$ untuk suatu x bilangan real, didefinisikan sebagai n kali komposisi dari fungsi F terhadap dirinya sendiri atau $F^n(x) = (F \circ F \circ F \circ \dots \circ F)(x) = F(F(F(\dots(x))))$.

Mengacu pada definisi 2.5 di atas, maka untuk suatu fungsi $F(x)$, $F^2(x)$ adalah iterasi ke-2 dari fungsi $F(x)$, dan dapat ditulis sebagai $F^2(x) = F(F(x))$. Demikian pula $F^3(x) = F(F(F(x)))$ dan seterusnya.

Contoh 2.9

Jika $F(x) = x^3$ maka iterasinya adalah:

$$F(x) = x^3$$

$$\begin{aligned}
 F^2(x) &= F(F(x)) \\
 &= F(x^3) \\
 &= (x^3)^3 \\
 &= x^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^3(x) &= F(F(F(x))) \\
 &= F(F(x^3)) \\
 &= F(x^9) \\
 &= (x^9)^3 \\
 &= x^{27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^4(x) &= F(F(F(F(x)))) \\
 &= F(F(F(x^3))) \\
 &= F(F(x^9)) \\
 &= F(x^{27}) \\
 &= (x^{27})^3 \\
 &= x^{81}, \text{ dan seterusnya.}
 \end{aligned}$$

Contoh 2.10

Jika $F(x) = x^2 - 1$, maka iterasinya adalah:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= x^2 - 1 \\
 F^2(x) &= F(F(x)) \\
 &= F(x^2 - 1) \\
 &= (x^2 - 1)^2 - 1 \\
 &= x^4 - 2x^2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^3(x) &= F(F(F(x))) \\
&= F(F(x^2 - 1)) \\
&= F(x^4 - 2x^2 - 1) \\
&= (x^4 - 2x^2 - 1)^2 - 1 \\
&= x^8 - 2x^6 - x^4 + 4x^4 - 2x^6 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 \\
&= x^8 - 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 + 1, \text{ dan seterusnya.}
\end{aligned}$$

F. Menemukan Nilai Iterasi yang Terakhir

Menemukan nilai iterasi yang terakhir. Hal yang paling mudah untuk memfungsikan iterasi dengan mathematica adalah dengan menggunakan perintah Nest. Perintahnya adalah:

Nest[fungsi, nilai awal, nomer iterasi] (Richard, 2000:204).

Dalam contoh berikut ini, diketahui $f(x) = x^3$ dan kemudian dicari iterasi ke-3 dari f yang dimulai dengan nilai awal 1.2. Perintahnya adalah:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_] := x^3;
```

```
Nest[f,1.2,3]
```

Diperoleh 137.371

Pernyataan NestList[...] digunakan untuk menyatakan iterasi sebanyak n kali. Perintahnya mirip dengan Nest. Untuk soal yang sama yaitu $f(x) = x^3$ dengan nilai awal 1.2 maka perintah untuk mencari 3 nilai untuk iterasi pertama adalah:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_] := x^3;
```

```
NestList[f,1.2,3]
```

```
Diperoleh {1.2,1.728,5.15978,137.371}
```

(Richard,

2000:204).

G. Tabel Iterasi

Cara berikutnya untuk mengelompokkan tabel iterasi yaitu pada awal dua baris pertama dijelaskan dulu fungsinya, selanjutnya menentukan variabel nilai awal, cetakan iterasi pertama yang diinginkan, dan cetakan iterasi terakhir yang diinginkan. Program *Mathematica* yang pendek melakukan perhitungan secara aktual. Pada contoh ini menggunakan `While[...]` yang menyatakan iterasi untuk fungsi $h(x) = 3.5x(1 - x)$ yang dimulai dari 1 dan nilai iterasi yang dicetak yaitu nilai dari iterasi ke-10 sampai dengan nilai iterasi yang ke-20. Perintahnya adalah:

```
Clear[h,x,I,y];
```

```
h[x_] := 3.5x (1 - x);
```

```
StartingValue = .1;
```

```
FirstIteration = 10;
```

```
LastIteration = 20;
```

```
I=0;
```

```
y = N[StartingValue];
```

```
While[i <= LastIteration,
If[ i >= FirstIteration,Print[i," ",N[y,8]] ];
y = h[y];
I = i+1 ]
```

hasilnya adalah:

```
10 0.86414351
11 0.41089828
12 0.84721309
13 0.45305075
14 0.86728519
15 0.40285557
16 0.84197036
17 0.46569696
18 0.87088155
19 0.39356405
20 0.83534986 (Richard, 2000:204).
```

H. Mengontrol Ketepatan Dari Perhitungan

Untuk sejumlah latihan, kita perlu untuk bisa mengontrol ketepatan dari perhitungan. Kita menggunakan perintah `SetPrecision` pada *Mathematica*, dengan menulis pemisalan n significant digits, penambahan nol-nol atau pembulatan yang diperlukan. Perintahnya adalah:

```
SetPrecision[expression,n]
```

Nol ditambahkan pada bilangan binary, sehingga 10 dasar perwakilan nomor-nomor baru tidak perlu diakhiri nol. Pada perintah-perintah berikut, variabel SigDigits mengontrol nilai dari sejumlah pembulatan:

```
Clear[h,x];  
h[x_] := 3.5x(1-x);  
StartingValue = .1;  
FirstIteration = 10;  
LastIteration = 20;  
SigDigits = 64;  
I=0;  
y = SetPrecision[StartingValue,SigDigits];  
While[i <= LastIteration,  
If[i >= FirstIteration,Print[i," ",N[y,8]]];  
y = SetPrecision[h[y] ,SigDigits];  
i = i+1]
```

hasilnya adalah:

```
10 0.86414351  
11 0.41089828  
12 0.84721309  
13 0.45305075  
14 0.86728519  
15 0.40285557  
16 0.84197036
```

17 0.46569696

18 0.87088155

19 0.39356405

20 0.83534986

Fungsi $h(x) = 3.5x(1 - x)$ tidak sensitif pada perubahan kecil dalam kondisi pemisalan, keluaran dari program ini sama dengan program sebelumnya (Richard, 2000:205).

I. Membuat Grafik Fungsi Iterasi

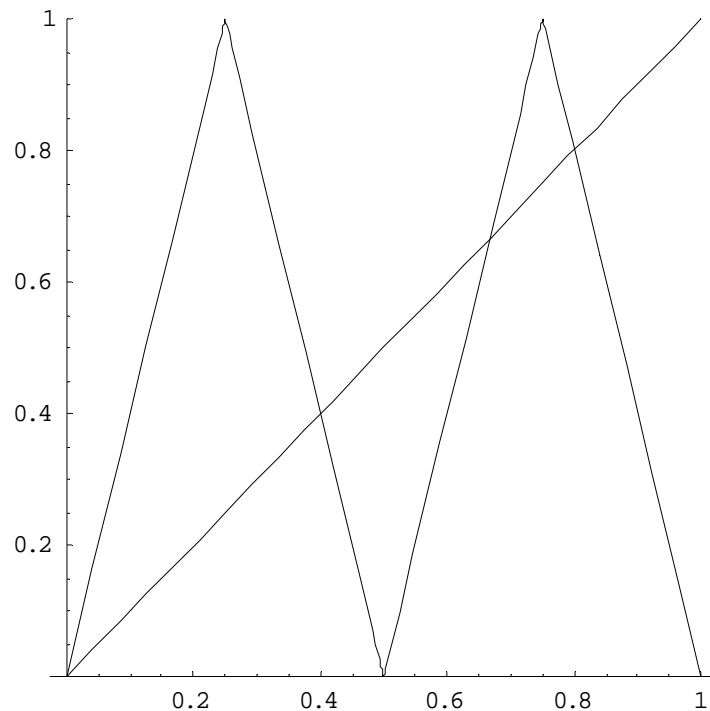
Pada beberapa latihan, perlu juga untuk membuat grafik dari fungsi iterasi. Sebagai contoh, untuk membuat grafik T^2 dimana

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{untuk } x \text{ pada } (0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{untuk } x \text{ pada } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Program untuk menyelesaikan soal ini adalah sebagai berikut:

```
Clear[T,x];
T[x_] := If[x<=.5,2x,2 - 2x];
xmin = 0;
xmax = 1;
NumberOfIterations = 2;
Plot[{Nest[T,x,NumberOfIterations],x},
{x,xmin,xmax},
PlotRange->{xmin,xmax},
AspectRatio->1]
```

Keluarannya adalah sebagai berikut:



Penggunaan pernyataan `if[...]` untuk menentukan $T(x)$. Variabel `xmin` dan `xmax` dicatat ulang pada titik akhir dan pertama. Nomer iterasi = 2 memberi tahu program untuk menghitung grafik dari fungsi T^2 . Jika angka 2 diganti dengan angka 3 maka yang terbuat adalah grafik T^3 . `Plot` dan `Nest` digunakan untuk membuat grafik pada garis $y = x$. Pada garis kedua perintah `Plot`, kita definisikan fungsi utama untuk membuat grafik. `Plotrange->{xmin,xmax}` adalah perintah untuk menampilkan bahwa kodomain harus sama dengan domain. Akhirnya, `AspectRatio->1` menjadikan grafiknya persegi (Richard, 2000:206).

J. Analisis grafik

Salah satu alat yang akurat untuk menyelidiki fungsi dinamik angka nyata adalah dengan analisis grafik. Program berikut ini untuk menghasilkan gambar. Analisis grafik digunakan untuk menganalisa iterasi pada $h(x)=3.5x(1-x)$ sampai iterasi ke-20 yang ditampilkan. Perintahnya adalah sebagai berikut:

```

h[x_] := 3.5x(1-x)
StartingValue = .1;
FirstIt = 0;
LastIt = 20;
xmin = 0;
xmax = 1;
i = 0;
y = N[StartingValue];
While[i < FirstIt,y = h[y]; i=i+1];
DataTable = {{y,y},{y,h[y]}};
While[i < LastIt,
y = h[y];
AppendTo[DataTable,{y,y}];
AppendTo[DataTable,{y,h[y]}}];
i = i+1];
AppendTo[DataTable,{h[y],h[y]}}];
Cobweb = ListPlot[DataTable,PlotJoined -> True,
PlotRange -> {{xmin,xmax},{xmin,xmax}},

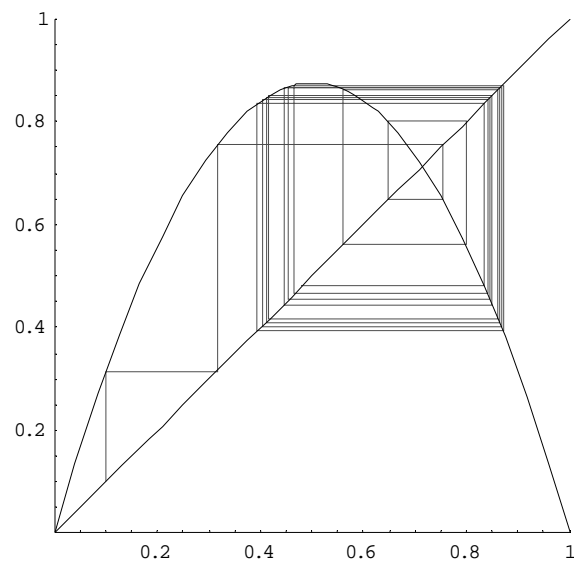
```

```

AspectRatio -> 1,PlotStyle->GrayLevel[.3],
DisplayFunction -> Identity];
Graph = Plot[{h[x],x},{x,xmin,xmax},
PlotRange -> {xmin,xmax},AspectRatio -> 1,
DisplayFunction ->Identity];
Show[Cobweb,Graph,DisplayFunction->$DisplayFunction]

```

Keluarannya adalah sebagai berikut:



(Richard,

2000:206).

K. Data dan Informasi

Data adalah fakta mengenai objek, angka, orang, dan lain-lain. Sejumlah penulis menggunakan data untuk menyatakan nilai-nilai yang secara actual terkandung dalam *Mathematica*, sedangkan informasi adalah hasil analisis dan sintesis terhadap data.

Pengolahan data menjadi informasi merupakan sebuah siklus yang terdiri dari tahap-tahap sebagai berikut, diantaranya:

1. Input

Tahap ini merupakan proses pemasukan data dan prosedur pengolahan data ke dalam komputer melalui alat input seperti *keyboard*. Prosedur pengolahan data itu merupakan urutan langkah untuk mengolah data yang ditulis dalam suatu bahasa pemrograman yang disebut program.

2. Pengolahan Data

Tahap ini merupakan tahap dimana data diolah dengan prosedur yang telah dimasukkan. Kegiatan pengolahan data meliputi klasifikasi (pengelompokan), kalkulasi, pengurutan, penggabungan, peringkasan baik dalam bentuk tabel maupun grafik, penyimpanan dan pembacaan data dari tempat penyimpanan data.

3. Output

Hasil pengolahan data akan ditampilkan pada alat output seperti monitor atau printer sebagai informasi.

L. Kerangka Berfikir

Kegiatan menghitung atau menyelesaikan masalah sistem dinamik yang selalu berubah dan memerlukan penanganan khusus untuk mengerjakan secara cepat membutuhkan sebuah solusi. Keefektifan kegiatan menyelesaikan

masalah sistem dinamik dapat berjalan lancar apabila didukung dengan kemampuan penanganan sistem dinamik secara komputerisasi. Dalam hal ini penanganan sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica* diharapkan dapat meningkatkan keefektifan dalam perhitungan. Hal ini dapat dilihat dari kemampuan *Mathematica* dibanding dengan bahasa pemrograman yang lain semisal *Pascal* dalam hal kemudahan menggunakan data dan tampilan yang memiliki keunggulan tersendiri.

Masalah sistem dinamik yang ada dalam penanganannya seringkali menggunakan sistem perhitungan secara manual. Untuk mengatasi hal tersebut maka perlu dilakukan sebuah sistem yang lebih baik yaitu dengan menggunakan program *Mathematica*.

Setelah diketahui masalah sistem dinamik, kemudian perlu dilakukan penerjemahan ke dalam bahasa pemrograman untuk menghasilkan sebuah program yang membantu dalam menangani masalah sistem dinamik. Dalam hal ini menggunakan bahasa pemrograman *Mathematica*.

Tahapan-tahapan tersebut di atas merupakan proses untuk dapat menghasilkan sebuah hasil atau jawaban dari suatu permasalahan untuk meyakinkan bahwa program tersebut merupakan program yang membantu dalam menyelesaikan masalah sistem dinamik.

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut:

A. Menentukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik yang sulit diselesaikan secara manual untuk dapat dijadikan sebagai permasalahan.

B. Merumuskan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan, yaitu: bagaimana mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*.

C. Studi Pustaka

Dalam penelitian, pokok bahasan yang ditelaah adalah mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica*. Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema-teorema untuk menyelesaikan permasalahan. Sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah. Pada akhirnya, sumber pustaka ini dijadikan landasan teori untuk melakukan penelitian.

D. Analisis dan Pemecahan Masalah

Analisis dan pemecahan masalah²⁸ dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mencari solusi masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik untuk fungsi iterasi.
2. Mencari solusi masalah sistem dinamik untuk titik tetap pada orbit.

E. Penarikan Simpulan

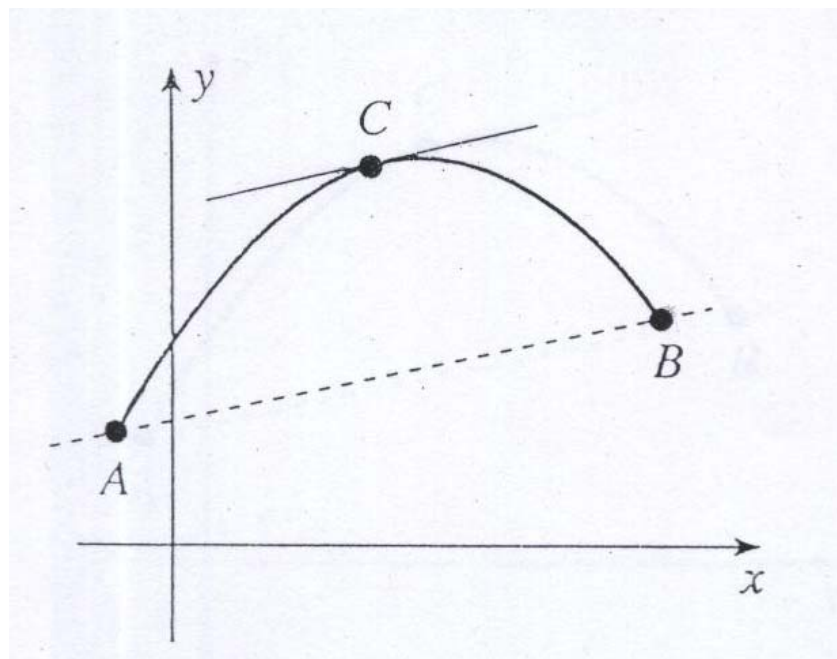
Tahap ini merupakan tahap akhir dari penelitian. Penarikan simpulan dari permasalahan yang dirumuskan berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya.

BAB IV

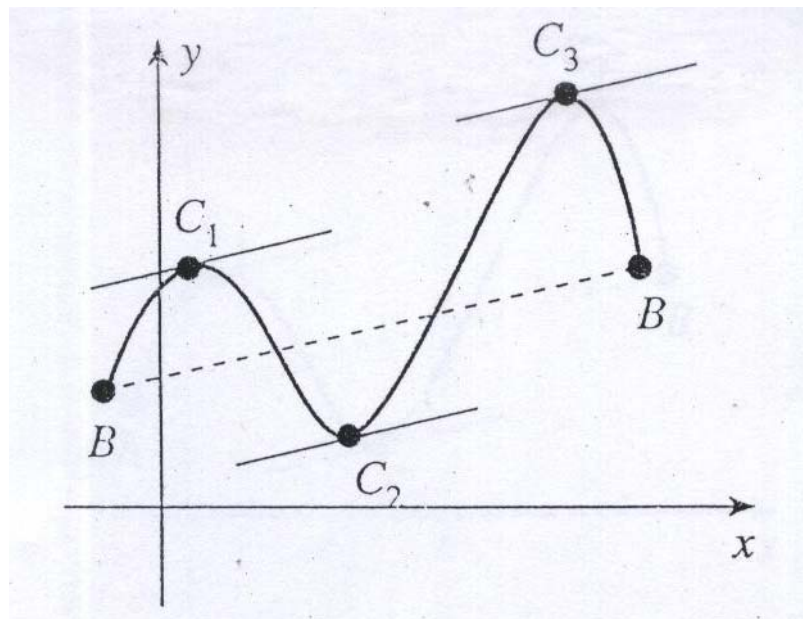
PEMBAHASAN

A. Teorema Nilai Rata-rata Untuk Titik Tetap

Dalam bahasa geometri, Teorema Nilai Rata-rata mudah dinyatakan dan dipahami. Teorema ini mengatakan bahwa jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung tak tegak pada setiap titik antara A dan B, maka terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik antara A dan B, sehingga garis singgung di titik C sejajar talibusur AB.



Gambar 4.1



Gambar 4.2

Teorema 4.1

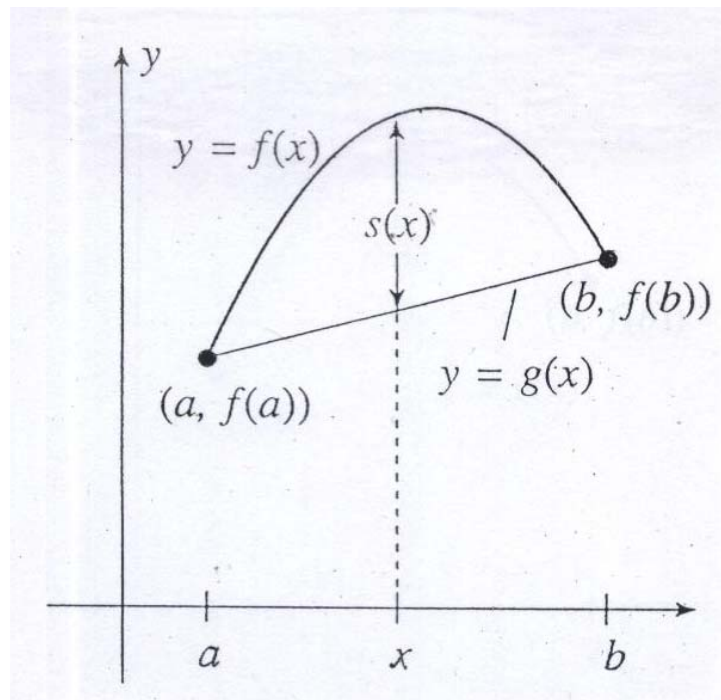
Jika f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada titik-titik dalam dari (a,b) , maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a,b) dengan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Atau sama dengan

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

(Purcell, 2003:204).



Gambar 4.3

Bukti

Pembuktian bersandar pada analisis seksama dari fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$, yang diperkenalkan dalam Gambar 4.3. Di sini $y = g(x)$ adalah persamaan garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Karena garis ini mempunyai kemiringan $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dan melalui titik $(a, f(a))$, bentuk kemiringan titik

untuk persamaannya adalah

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Ini kemudian menghasilkan rumus untuk $s(x)$, yakni:

$$s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

$$\Leftrightarrow s(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Jelas $s(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$ dan

$$s(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$

$$\Leftrightarrow s(b) = \left[\frac{[f(b) - f(a)](b - a)}{b - a} \right] - \left[\frac{[f(b) - f(a)](b - a)}{b - a} \right]$$

$$\Leftrightarrow s(b) = 0$$

Dipunyai f kontinu pada selang tutup $[a, b]$ dan $f'(x)$ ada pada $[a, b]$. Jadi s kontinu pada $[a, b]$ dan $s'(x)$ ada pada (a, b) .

Jadi s memenuhi kondisi teorema Nilai Rata-rata (*Theorema Rolle*).

Pilih $c \in (a, b) \ni s'(c) = 0$

Jelas

$$s'(x) = \frac{d \left[f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]}{dx}$$

$$\Leftrightarrow s'(x) = \left[f'(x) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right]$$

$$\Leftrightarrow s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Jelas $s'(c) = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Jadi terbukti jika f kontinu pada selang tutup $[a,b]$ dan terdeferensialkan pada titik-titik dalam dari (a,b) , maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a,b) dengan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

B. Titik Tetap pada Fungsi Real

Titik tetap dapat diklasifikasikan menjadi tiga, yaitu titik tetap penarik, titik tetap pelempar, dan titik tetap netral.

Definisi 4.1

Misal $I \subseteq \mathbb{R}$, $F: I \rightarrow I$ fungsi, titik $x_0 \in I$ adalah titik tetap pada F . Titik x_0 disebut:

1. Titik tetap netral, jika $|F'(x_0)| = 1$
2. Titik tetap penarik, jika $|F'(x_0)| < 1$
3. Titik tetap pelempar, jika $|F'(x_0)| > 1$

Contoh 4.1

Misal $F(x) = x(1-x)$ dan $x \in \mathbb{R}$. Maka titik tetap dari fungsi $F(x) = x(1-x)$ adalah:

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) = x$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Untuk mengklasifikasikan titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x(1-x)$ yaitu $F'(x) = 1 - 2x$ sehingga untuk $x = 0$ diperoleh:

$$\begin{aligned} |F'(0)| &= |1 - 2 \cdot (0)| \\ &= |1 - 0| \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi $x = 0$ merupakan titik tetap netral.

Contoh 4.2

Misal $F(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ dan $x \in \mathbb{R}$. Maka titik-titik tetap dari fungsi

$F(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ adalah:

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{2} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \left(x - \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = \frac{3}{2}$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ adalah 0 dan $\frac{3}{2}$.

Diketahui $F(x) = x^2 - \frac{x}{2}$ jadi $F'(x) = 2x - \frac{1}{2}$ sehingga

$$\text{untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = \left| 2 \cdot (0) - \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{untuk } x = \frac{3}{2} \text{ maka } \left| F' \left(\frac{3}{2} \right) \right| = \left| 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5}{2} \right| = \frac{5}{2} > 1$$

Jadi untuk $x = 0$ merupakan titik tetap penarik, dan

$$\text{untuk } x = \frac{3}{2} \text{ merupakan titik tetap pelembar.}$$

C. Soal-soal Yang Dapat Diselesaikan Secara Manual dan Diselesaikan dengan Menggunakan *Mathematica*

Contoh 4.3

Misal $F(x) = x^2 - 2$, maka titik tetap oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan cara manual

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = -1$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2 - 2$ adalah -1 dan 2.

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

$$\text{Nroots}[x^2-x-2=0,x]$$

$$\text{Hasilnya } x = -1 \text{ dan } x = 2$$

Selain dengan Nroots dapat pula dicari dengan perintah:

$$\text{Solve}[x^2-x-2=0]$$

$$\text{Hasilnya } \{\{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow 2\}\}$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2 - 2$ adalah -1 dan 2.

Klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^2 - 2$ yaitu:

$$F'(x) = 2x$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } |F'(-1)| = |2 \cdot (-1)| = 2 > 1$$

$$\text{Untuk } x = 2 \text{ maka } |F'(2)| = |2 \cdot (2)| = 4 > 1$$

Jadi untuk $x = -1$ merupakan titik tetap pelempar, karena $|F'(-1)| = 2 > 1$.

untuk $x = 2$ merupakan titik tetap pelempar, karena $|F'(2)| = 4 > 1$.

Contoh 4.4

Misal $F(x) = x - x^2$, maka titik tetap oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan cara manual

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x - x^2$ adalah 0.

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

$$\text{Nroots}[-x^2 = 0, x]$$

Hasilnya $x = 0$.

Selain dengan Nroots dapat pula dicari dengan perintah:

$$\text{Solve}[-x^2 = 0]$$

Hasilnya $\{\{x \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 0\}\}$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x - x^2$ adalah 0.

Klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x - x^2$ yaitu:

$$F'(x) = 1 - 2x$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |1 - 2 \cdot (0)| = 1$$

Jadi untuk $x = 0$ merupakan titik tetap netral, karena $|F'(0)| = 1 = 1$.

Contoh 4.5

Misal $F(x) = x^2$, maka titik tetap oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan cara manual

$$F(x) = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1$$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2$ adalah 0 dan 1.

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

$$\text{Nroots}[x^2-x=0,x]$$

Hasilnya $x = 0$ dan $x = 1$

Selain dengan Nroots dapat pula dicari dengan perintah:

$$\text{Solve}[x^2-x=0]$$

Hasilnya $\{\{x \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 1\}\}$

Jadi titik tetap dari $F(x) = x^2$ adalah 0 dan 1.

Klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^2$ yaitu:

$$F'(x) = 2x$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |2 \cdot (0)| = 0 < 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ maka } |F'(1)| = |2 \cdot (1)| = 2 > 1$$

Jadi untuk $x = 0$ merupakan titik tetap penarik, karena $|F'(0)| = 0 < 1$.

untuk $x = 1$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(1)| = 2 > 1$.

D. Titik Tetap pada Orbit

Contoh 4.6

Misal $F(x) = x^2 - 2$ dan $x_0 = 1$. Maka titik tetap oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan Cara Manual

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(1)$$

$$= (1)^2 - 2$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1$$

$$x_2 = F(F(x_0))$$

$$= F(-1)$$

$$= (-1)^2 - 2$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1$$

$$x_3 = F(F(F(x_0)))$$

$$= F(-1)$$

$$= (-1)^2 - 2$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1$$

$$x_4 = F(F(F(F(x_0))))$$

$$= F(-1)$$

$$= (-1)^2 - 2$$

$$= 1 - 2$$

$$= -1 \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi orbit dari $x_0 = 1$ oleh $F(x) = x^2 - 2$ adalah barisan $1, -1, -1, -1, -1, \dots$

Jadi titik tetapnya adalah -1 .

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^2-2;
```

```
NestList[f,1,4]
```

hasilnya adalah: $\{1, -1, -1, -1, -1\}$

Jadi titik tetapnya adalah -1 .

Klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari

turunan yang pertama dari $F(x) = x^2 - 2$ yaitu:

$$F'(x) = 2x$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } |F'(-1)| = |2 \cdot (-1)| = 2 > 1$$

Jadi untuk $F(x) = x^2 - 2$ dan $x_0 = 1$, maka titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk nilai $x = -1$ maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.7

Misal $F(x) = x - x^2$ dan $x_0 = 2$. Maka titik tetap oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan Cara Manual

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(2)$$

$$= 2 - 2^2$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

$$x_2 = F(F(x_0))$$

$$= F(-2)$$

$$= -2 - (-2)^2$$

$$= -2 - 4$$

$$= -6$$

$$x_3 = F(F(F(x_0)))$$

$$= F(-6)$$

$$= -6 - (-6)^2$$

$$= -6 - 36$$

$$= -42$$

$$x_4 = F(F(F(F(x_0))))$$

$$= F(-42)$$

$$= -42 - (-42)^2$$

$$= -42 - 1764$$

$$= -1806$$

$$x_5 = F(F(F(F(F(x_0))))))$$

$$= F(-1806)$$

$$= -1806 - (-1806)^2$$

$$= -1806 - 3261636$$

$$= -3263442 \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi orbit dari $x_0 = 2$ oleh $F(x) = x - x^2$ adalah barisan 2, -2, -6, -42, -1806,

...

Jadi titik tetapnya adalah -2, -6, -42, -1806, -3263442, ...

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x-x^2;
```

```
NestList[f,2,5]
```

hasilnya adalah {2, -2, -6, -42, -1806, -3263442}

Jadi titik tetapnya adalah -2, -6, -42, -1806, -3263442.

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari

turunan yang pertama dari $F(x) = x - x^2$ yaitu:

$$F'(x) = 1 - 2x$$

$$\text{Untuk } x = -2 \text{ maka } |F'(-2)| = |1 - 2(-2)| = |1 + 4| = 5 > 1$$

Untuk $x = -6$ maka $|F(-6)| = |1 - 2(-6)| = |1 + 12| = 13 > 1$ dan seterusnya.

Jadi untuk $F(x) = x - x^2$ dan $x_0 = 2$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F(x)| > 1$.

Contoh 4.8

Misal $F(x) = x^2$ dan $x_0 = 2$. Maka orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut adalah:

1. Dikerjakan dengan Cara Manual

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = F(x_0)$$

$$= F(2)$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

$$x_2 = F(F(x_0))$$

$$= F(4)$$

$$= 4^2$$

$$= 16$$

$$x_3 = F(F(F(x_0)))$$

$$= F(16)$$

$$= (16)^2$$

$$= 256$$

$$x_4 = F(F(F(F(x_0))))$$

$$= F(256)$$

$$= (256)^2$$

= 65536 dan seterusnya.

Jadi orbit dari $x_0 = 2$ oleh $F(x) = x^2$ adalah barisan 2, 4, 16, 256, 65536, ...

Jadi titik tetapnya adalah 4, 16, 256, 65536, ...

2. Dikerjakan dengan Menggunakan *Mathematica*

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^2;
```

```
NestList[f,2,5]
```

hasilnya adalah {2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296}

Jadi titik tetapnya adalah 4, 16, 256, 65536.

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^2$ yaitu:

$$F'(x) = 2x$$

$$\text{Untuk } x = 4 \text{ maka } |F'(4)| = |2 \cdot 4| = 8 > 1$$

$$\text{Untuk } x = 16 \text{ maka } |F'(16)| = |2 \cdot 16| = 32 > 1 \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi untuk $F(x) = x^2$ dan $x_0 = 2$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

E. Contoh Soal Yang Sulit Diselesaikan Secara Manual

Contoh 4.9

Misal $F(x) = x^{15}$ dan $x_0 = 15$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit

diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.9 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = x^{15}$.

Perintahnya:

`NRroots[x^15-x==0,x]`

Hasilnya:

$$x = -1.$$

$$x = -0.900969 - 0.433884i$$

$$x = -0.900969 + 0.433884i$$

$$x = -0.62349 - 0.781831i$$

$$x = -0.62349 + 0.781831i$$

$$x = -0.222521 - 0.974928i$$

$$x = -0.222521 + 0.974928i$$

$$x = 0$$

$$x = 0.222521 - 0.974928i$$

$$x = 0.222521 + 0.974928i$$

$$x = 0.62349 - 0.781831i$$

$$x = 0.62349 + 0.781831i$$

$$x = 0.900969 - 0.433884i$$

$$x = 0.900969 + 0.433884i$$

$$x = 1.$$

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^{15}$ yaitu:

$$F'(x) = 15x^{14}$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } |F'(-1)| = |15 \cdot (-1)^{14}| = 15 > 1$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |15 \cdot (0)^{14}| = 0 < 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ maka } |F'(1)| = |15 \cdot (1)^{14}| = 15 > 1$$

Jadi $x = -1$ merupakan titik tetap pelempar, karena $|F'(-1)| = 15 > 1$.

$x = 0$ merupakan titik tetap penarik, karena $|F'(0)| = 0 < 1$.

$x = 1$ merupakan titik tetap pelempar, karena $|F'(1)| = 15 > 1$.

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = x^{15}$ dengan $x = 15$.

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^15;
```

```
NestList[f,15,2]
```

hasilnya adalah:

```
{15, 437893890380859375,
```

```
417381588438865064368452324823534230483
```

```
369040559810328374194107072236685794679808754722755957309437
```

```
745659135275270109068868122026533554227042961901854094259468
```

```
910828281856816551571703025140853811595513220018490238081913
```

```
2266219495530634731039754115045070648193359375}.
```

Jadi untuk $F(x) = x^{15}$ dan $x_0 = 15$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.10

Misal $F(x) = x^{25}$ dan $x_0 = 545$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.10 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = x^{25}$.

Perintahnya:

```
NRroots[x^25-x==0,x]
```

Hasilnya:

$$x = -1$$

$$x = -0.965926 - 0.258819i$$

$$x = -0.965926 + 0.258819i$$

$$x = -0.866025 - 0.5i$$

$$x = -0.866025 + 0.5i$$

$$x = -0.707107 - 0.707107i$$

$$x = -0.707107 + 0.707107i$$

$$x = -0.5 - 0.866025i$$

$$x = -0.5 + 0.866025i$$

$$x = -0.258819 - 0.965926i$$

$$x = -0.258819 + 0.965926i$$

$$x = 0$$

$$x = 1.19264 \times 10^{17} - 1i$$

$$x = 1.19264 \times 10^{17} + 1i$$

$$x = 0.258819 - 0.965926i$$

$$x = 0.258819 + 0.965926i$$

$$x = 0.5 - 0.866025i$$

$$x = 0.5 + 0.866025i$$

$$x = 0.707107 - 0.707107i$$

$$x = 0.707107 + 0.707107i$$

$$x = 0.866025 - 0.5i$$

$$x = 0.866025 + 0.5i$$

$$x = 0.965926 - 0.258819i$$

$$x = 0.965926 + 0.258819i$$

$$x = 1$$

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^{25}$ yaitu:

$$F'(x) = 25x^{24}$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } |F'(-1)| = |25 \cdot (-1)^{24}| = 25 > 1$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |25 \cdot (0)| = 0 < 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ maka } |F'(1)| = |25 \cdot (1)| = 25 > 1$$

Jadi $x = -1$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(-1)| = 25 > 1$.

$x = 0$ merupakan titik tetap penarik, karena $|F'(0)| = 0 < 1$.

$x = 1$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(1)| = 25 > 1$

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = x^{25}$ dengan $x = 545$.

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^25;
```

```
NestList[f,545,1]
```

hasilnya adalah:

```
{545,
```

```
256987829816436202143147864160233298385955790928825438022
```

```
613525390625}.
```

Jadi untuk $F(x) = x^{25}$ dan $x_0 = 545$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelembar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.11

Misal $F(x) = x^{20}$ dan $x_0 = 9$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.11 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = x^{20}$.

Perintahnya:

```
NRroots[x^20-x==0,x]
```

Hasilnya:

```
x = -0.986361 - 0.164595i
```

```
x = -0.986361 + 0.164595i
```

```
x = -0.879474 - 0.475947i
```

```
x = -0.879474 + 0.475947i
```

$$x = -0.677282 - 0.735724i$$

$$x = -0.677282 + 0.735724i$$

$$x = -0.401695 - 0.915773i$$

$$x = -0.401695 + 0.915773i$$

$$x = -0.0825793 - 0.996584i$$

$$x = -0.0825793 + 0.996584i$$

$$x = 0$$

$$x = 0.245485 - 0.9694i$$

$$x = 0.245485 + 0.9694i$$

$$x = 0.546948 - 0.837166i$$

$$x = 0.546948 + 0.837166i$$

$$x = 0.789141 - 0.614213i$$

$$x = 0.789141 + 0.614213i$$

$$x = 0.945817 - 0.324699i$$

$$x = 0.945817 + 0.324699i$$

$$x = 1.$$

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan

mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^{20}$ yaitu:

$$F'(x) = 20x^{19}$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |20 \cdot (0^{19})| = 0 < 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ maka } |F'(1)| = |20 \cdot (1^{19})| = 20 > 1$$

Jadi $x = 0$ merupakan titik tetap penarik, karena $|F'(0)| = 0 < 1$.

$x = 1$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(1)| = 20 > 1$.

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = x^{20}$ dengan $x = 9$.

Perintahnya:

`Clear[f,x];`

`f[x_]:=x^20;`

`NestList[f,9,1]`

Hasilnya adalah $\{9,12157665459056928801\}$.

Jadi untuk $F(x) = x^{20}$ dan $x_0 = 9$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.12

Misal $F(x) = x^{17} + 3$ dan $x_0 = 11$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.12 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = x^{17} + 3$.

Perintahnya:

`NRroots[x^17-x+3==0,x]`

Hasilnya:

$$x = -1.08633$$

$$x = -1.00984 - 0.397987i$$

$$x = -1.00984 + 0.397987i$$

$$x = -0.791853 - 0.738446i$$

$$x = -0.791853 + 0.738446i$$

$$x = -0.465012 - 0.972816i$$

$$x = -0.465012 + 0.972816i$$

$$x = -0.0778989 - 1.06912i$$

$$x = -0.0778989 + 1.06912i$$

$$x = 0.312905 - 1.017i$$

$$x = 0.312905 + 1.017i$$

$$x = 0.65254 - 0.829137i$$

$$x = 0.65254 + 0.829137i$$

$$x = 0.897877 - 0.537805i$$

$$x = 0.897877 + 0.537805i$$

$$x = 1.02444 - 0.185664i$$

$$x = 1.02444 + 0.185664i$$

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^{17} + 3$ yaitu:

$$F'(x) = 17x^{16}$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } x = -1.08633 \text{ maka } |F'(-1.08633)| &= |17 \cdot (-1.08633)^{16}| \\ &= |17 \cdot (3,761736)| \\ &= 63.94952 > 1 \end{aligned}$$

Jadi $x = -1.08633$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(-1.08633)| > 1$.

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = x^{17} + 3$ dengan $x = 11$.

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^17+3;
```

NestList[f,11,2]

Hasilnya adalah:

{11, 505447028499293774,
 917246389039755974244788967545212173474
 276634276093786990135160264012694839027819804166782838929516
 105693166852339972311657992718311145842331617866790745811619
 042210531091247073055355715988323965358787496461508674310652
 264722428736683407484215253374011783597138766050157186281313
 9730697592290851815427}.

Jadi untuk $F(x) = x^{17} + 3$ dan $x_0 = 11$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.13

Misal $F(x) = 5x^{13} + 9$ dan $x_0 = 13$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.13 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = 5x^{13} + 9$.

Perintahnya:

NRroots[5x^13-x+9=0,x]

Hasilnya:

$$x = -1.05521$$

$$x = -0.931667 - 0.493524i$$

$$x = -0.931667 + 0.493524i$$

$$x = -0.591409 - 0.869682i$$

$$x = -0.591409 + 0.869682i$$

$$x = -0.117197 - 1.04124i$$

$$x = -0.117197 + 1.04124i$$

$$x = 0.378375 - 0.972278i$$

$$x = 0.378375 + 0.972278i$$

$$x = 0.782266 - 0.684156i$$

$$x = 0.782266 + 0.684156i$$

$$x = 1.00724 - 0.245737i$$

$$x = 1.00724 + 0.245737i$$

Klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan mencari turunan yang pertama dari $F(x) = 5x^{13} + 9$ yaitu:

$$F'(x) = 65x^{12}$$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } x = -1.05521 \text{ maka } |F'(-1.05521)| &= |65 \cdot (-1.05521)^{12}| \\ &= |65 \cdot (-2.01097)| \\ &= |-130,7131| \\ &= 130,7131 > 1 \end{aligned}$$

Jadi $x = -1.05521$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(-1.05521)| > 1$.

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = 5x^{13} + 9$ dengan $x = 13$.

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=5x^13+9;
```

NestList[f,13,2]

Hasilnya adalah:

{13, 1514375532961274,
11015560512490386903601279297112970488703
664380076919251390587430494492743547212535104644233056678927
911994617298676094670424072234496467541561737734298691242658
00386387735644406790530301664345989129}

Jadi untuk $F(x) = 5x^{13} + 9$ dan $x_0 = 13$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelempar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

Contoh 4.14

Misal $F(x) = x^{21}$ dan $x_0 = 9$. Titik tetap dan orbit dari x_0 oleh fungsi tersebut sangat sulit diselesaikan secara manual. Karena secara manual sangat sulit diselesaikan, maka untuk menyelesaikan soal pada contoh 4.14 yaitu dengan menggunakan *Mathematica*.

1. Mencari titik tetap untuk fungsi $F(x) = x^{21}$.

Perintahnya:

NRroots[x^21==0,x]

Hasilnya:

$$x = -1$$

$$x = -0.951057 - 0.309017i$$

$$x = -0.951057 + 0.309017i$$

$$x = -0.809017 - 0.587785i$$

$$x = -0.809017 + 0.587785i$$

$$x = -0.587785 - 0.809017i$$

$$x = -0.587785 + 0.809017i$$

$$x = -0.309017 - 0.951057i$$

$$x = -0.309017 + 0.951057i$$

$$x = -5.00323 \times 10^{17} - 1i$$

$$x = -5.00323 \times 10^{17} + 1i$$

$$x = 0$$

$$x = 0.309017 - 0.951057i$$

$$x = 0.309017 + 0.951057i$$

$$x = 0.587785 - 0.809017i$$

$$x = 0.587785 + 0.809017i$$

$$x = 0.809017 - 0.587785i$$

$$x = 0.809017 + 0.587785i$$

$$x = 0.951057 - 0.309017i$$

$$x = 0.951057 + 0.309017i$$

$$x = 1.$$

Jadi klasifikasi untuk titik tetap tersebut di atas dapat dicari dengan

mencari turunan yang pertama dari $F(x) = x^{21}$ yaitu:

$$F'(x) = 21x^{20}$$

$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } |F'(-1)| = |21 \cdot (-1)^{20}| = 21 > 1$$

$$\text{Untuk } x = 0 \text{ maka } |F'(0)| = |21 \cdot (0)^{20}| = 0 < 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ maka } |F'(1)| = |21 \cdot (1)^{20}| = 21 > 1$$

Jadi $x = -1$ merupakan titik tetap pelampar, karena $|F'(-1)| = 21 > 1$.

$x = 0$ merupakan titik tetap penarik, karena $|F'(0)| = 0 < 1$.

$x = 1$ merupakan titik tetap pelembar, karena $|F'(1)| = 21 > 1$.

2. Mencari titik tetap pada orbit untuk fungsi $F(x) = x^{21}$ dengan $x = 9$.

Perintahnya:

```
Clear[f,x];
```

```
f[x_]:=x^21;
```

```
NestList[f,9,2]
```

Hasilnya adalah:

```
{9, 109418989131512359209,
6621351795197746384958220495894835051
799919322668003235604140499602511981664103035246160746891589
658257901949193642217421563257213245455784258613640623796990
245951939047980447693207289228086554695471740243070869290487
548822410907248197952598083903720221624692839969056575454446
523322416653911268575540728636773735879627986707911791301711
180170156622947951421050725973655905155715243509982334864266
124046820321927357662409}.
```

Jadi untuk $F(x) = x^{21}$ dan $x_0 = 9$ semua titik tetapnya merupakan titik tetap pelembar, karena untuk setiap nilai x maka $|F'(x)| > 1$.

BAB V

PENUTUP

A. Simpulan

Berdasarkan uraian pada pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk mencari solusi titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik dengan menggunakan *Mathematica* dapat dicari dengan perintah **NRroots** ataupun **Solve**. Sedangkan untuk mencari titik tetap pada orbit dari fungsi dalam sistem dinamik dapat dicari dengan menggunakan perintah **Nest** ataupun **NestList**.
2. Dengan menggunakan *Mathematica* lebih cepat dan lebih mudah dalam mencari solusi untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik.

B. Saran

Pembahasan mengenai penggunaan *software Mathematica* untuk masalah titik tetap dari fungsi dalam sistem dinamik masih sangat terbatas sehingga perlu diadakan pengkajian yang lebih mendalam dalam pengkajian berikutnya, dan apakah *software Mathematica* ini dapat berlaku untuk masalah sistem dinamik yang lain, seperti masalah titik tetap pada fungsi trigonometri dan lain-lain.

Bagi mahasiswa matematika yang tertarik untuk melakukan penelitian yang berkaitan dengan sistem dinamik, hendaknya dapat melakukan penelitian

pada pokok bahasan sistem dinamik yang lain, sehingga dapat mengembangkan aplikasi *Mathematica* untuk masalah sistem dinamik.

DAFTAR PUSTAKA

- Abell, Martha L. dan Braselton, James P. 1994. *Mathematica By Example, Revised Edition*. Cambridge:Academic Press Inc.
- Devaney, Robert L., 1992. *A First Course In Chaotic dynamical Systems*. Menlo Park:Addison-Wesley.
- Perto Lawrence, 2000. *Differential Equations and Dynamical System*. New York:Springer-Verlag.
- Purcell, Edwin J., 2003. *Kalkulus 1*. Hamline:Addison-Wesley.
- Richard A. dan Holmgren, 2000. *A First Course In Discrete Dynamical System*. New York:Springer-Verlag.
- Robert L. dan Devaney, 1986. *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Canada:United States of America.
- Robinson James C. 2004. *An Introduction to Ordinary Differential equations*. United Kingdom:Cambridge University Press.

Menemukan Nilai Iterasi yang Terakhir (halaman 18)

Mencari nilai iterasi yang ke-3 dari fungsi $f(x) = x^3$

```
Clear[f, x];  
f[x_] := x^3;  
Nest[f, 1.2, 3]  
137.371
```

Mencari 3 nilai iterasi yang pertama dari fungsi $f(x) = x^3$

```
Clear[f, x];  
f[x_] := x^3;  
NestList[f, 1.2, 3]  
{1.2, 1.728, 5.15978, 137.371}
```

Tabel Iterasi (halaman 19)

```
Clear[h, x, I, y]
h[x_] := 3.5 x (1 - x);
StartingValue = .1;
FirstIteration = 10;
LastIteration = 20;
i = 0;
y = N[StartingValue];
While[i ≤ LastIteration,
  if[i ≥ FirstIteration, Print[i, " ", N[y, 8]]];
  y = h[y];
  i = i + 1]
```

```
0 0.1
1 0.315
2 0.755213
3 0.647033
4 0.799335
5 0.561396
6 0.861807
7 0.416835
8 0.850793
9 0.444306
10 0.864144
11 0.410898
12 0.847213
13 0.453051
14 0.867285
15 0.402856
16 0.84197
17 0.465697
18 0.870882
19 0.393564
20 0.83535
```

Mengontrol Ketepatan dari Perhitungan (halaman 21)

```
Clear[h, x];
h[x_] := 3.5 x (1 - x);

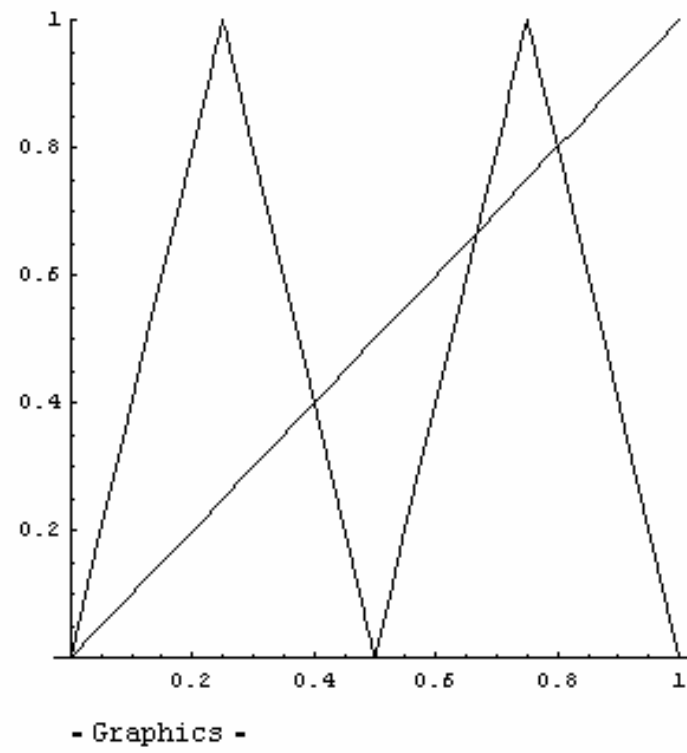
StartingValue = .1;
FirstIteration = 10;
LastIteration = 20;
SigDigits = 64;

i = 0;
y = SetPrecision[StartingValue, SigDigits];
While[i ≤ LastIteration,
  If[i ≥ FirstIteration, Print[i, " ", N[y, 8]]];
  y = SetPrecision[h[y], SigDigits];
  i = i + 1]
```

10 0.86414351
11 0.41089828
12 0.84721309
13 0.45305075
14 0.86728519
15 0.40285557
16 0.84197036
17 0.46569696
18 0.87088155
19 0.39356405
20 0.83534986

Membuat Grafik Fungsi Iterasi (halaman 22)

```
Clear[T, x];  
T[x_] := If[x ≤ .5, 2 x, 2 - 2 x];  
  
xmin = 0;  
xmax = 1;  
  
NumberOfIterations = 2;  
Plot[{Nest[T, x, NumberOfIterations], x},  
  {x, xmin, xmax},  
  PlotRange → {xmin, xmax},  
  AspectRatio → 1]
```

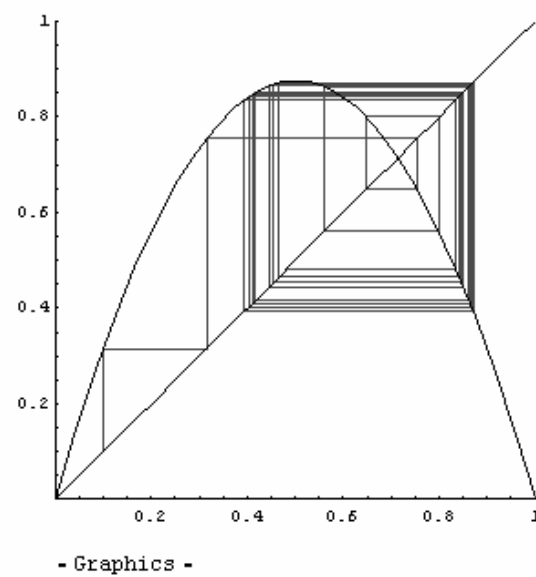


Analisis Grafik (halaman 24)

```

h[x_] := 3.5 x (1 - x)
StartingValue = .1;
FirstIt = 0;
LastIt = 20;
xmin = 0;
xmax = 1;
i = 0;
y = N[StartingValue];
While[i < FirstIt, y = h[y]; i = i + 1];
DataTable = {{y, y}, {y, h[y]}};
While[i < LastIt,
  y = h[y];
  AppendTo[DataTable, {y, y}];
  AppendTo[DataTable, {y, h[y]}}];
  i = i + 1];
AppendTo[DataTable, {h[y], h[y]}}];
Cobweb = ListPlot[DataTable, PlotJoined -> True,
  PlotRange -> {{xmin, xmax}, {xmin, xmax}},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> GrayLevel[.3],
  DisplayFunction -> Identity];
Graph = Plot[{h[x], x}, {x, xmin, xmax},
  PlotRange -> {xmin, xmax}, AspectRatio -> 1,
  DisplayFunction -> Identity];
Show[Cobweb, Graph,
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]

```



Contoh 4.3

```
NRoots[x^2 - x - 2 == 0, x]
```

```
x == -1. || x == 2.
```

**Contoh 4.4**

```
NRoots[-x^2 == 0, x]
```

```
x == 0. || x == 0.
```

**Contoh 4.5**

```
NRoots[x^2 - x == 0, x]
```

```
x == 0. || x == 1.
```



Contoh 4.6

```
Clear[f, x];  
f[x_] := x^2 - 2;  
NestList[f, 1, 4]  
  
{1, -1, -1, -1, -1}
```

**Contoh 4.7**

```
Clear[f, x];  
f[x_] := x - x^2;  
NestList[f, 2, 5]  
  
{2, -2, -6, -42, -1806, -3263442}
```

**Contoh 4.8**

```
Clear[f, x];  
f[x_] := x^2;  
NestList[f, 2, 5]  
  
{2, 4, 16, 256, 65536, 4294967296}
```



Contoh 4.9

```
NRoots[x^15 - x == 0, x]
```

```
x == -1. || x == -0.900969 - 0.433884 i ||
x == -0.900969 + 0.433884 i ||
x == -0.62349 - 0.781831 i || x == -0.62349 + 0.781831 i ||
x == -0.222521 - 0.974928 i || x == -0.222521 + 0.974928 i ||
x == 0. || x == 0.222521 - 0.974928 i ||
x == 0.222521 + 0.974928 i || x == 0.62349 - 0.781831 i ||
x == 0.62349 + 0.781831 i || x == 0.900969 - 0.433884 i ||
x == 0.900969 + 0.433884 i || x == 1.
```

```
Clear[f, x];
```

```
f[x_] := x^15;
```

```
NestList[f, 15, 2]
```

```
{15, 437893890380859375,
4173815884388650643684523248235342304833690405598103\
283741941070722366857946798087547227559573094377456\
591352752701090688681220265335542270429619018540942\
594689108282818568165515717030251408538115955132200\
184902380819132266219495530634731039754115045070648\
193359375}
```

Contoh 4.10

```

NRoots[x^25 - x == 0, x]
x == -1. || x == -0.965926 - 0.258819 i ||
x == -0.965926 + 0.258819 i || x == -0.866025 - 0.5 i ||
x == -0.866025 + 0.5 i || x == -0.707107 - 0.707107 i ||
x == -0.707107 + 0.707107 i || x == -0.5 - 0.866025 i ||
x == -0.5 + 0.866025 i || x == -0.258819 - 0.965926 i ||
x == -0.258819 + 0.965926 i || x == 0. ||
x == 1.19264 x 10-17 - 1. i || x == 1.19264 x 10-17 + 1. i ||
x == 0.258819 - 0.965926 i ||
x == 0.258819 + 0.965926 i || x == 0.5 - 0.866025 i ||
x == 0.5 + 0.866025 i || x == 0.707107 - 0.707107 i ||
x == 0.707107 + 0.707107 i || x == 0.866025 - 0.5 i ||
x == 0.866025 + 0.5 i || x == 0.965926 - 0.258819 i ||
x == 0.965926 + 0.258819 i || x == 1.

```

```

Clear[f, x];
f[x_] := x^25;
NestList[f, 545, 1]
{545,
2569878298164362021431478641602332983859557909288254\
38022613525390625}

```

Contoh 4.11

```
NRoots[x^20 - x == 0, x]
```

```
x == -0.986361 - 0.164595 i || x == -0.986361 + 0.164595 i ||
x == -0.879474 - 0.475947 i || x == -0.879474 + 0.475947 i ||
x == -0.677282 - 0.735724 i || x == -0.677282 + 0.735724 i ||
x == -0.401695 - 0.915773 i || x == -0.401695 + 0.915773 i ||
x == -0.0825793 - 0.996584 i ||
x == -0.0825793 + 0.996584 i || x == 0. ||
x == 0.245485 - 0.9694 i || x == 0.245485 + 0.9694 i ||
x == 0.546948 - 0.837166 i ||
x == 0.546948 + 0.837166 i || x == 0.789141 - 0.614213 i ||
x == 0.789141 + 0.614213 i || x == 0.945817 - 0.324699 i ||
x == 0.945817 + 0.324699 i || x == 1.
```

```
Clear[f, x];
```

```
f[x_] := x^20;
```

```
NestList[f, 9, 2]
```

```
{9, 12157665459056928801,
4977414122938492192881464029729961679802517669640314\
331069754317413863193300588672960378941038799444233\
797200629740876278809425638436874294137213623651683\
084623545115805694417048191856898335577690331770093\
271154442020977681305435856437590481321498962517248\
672813060123683011804992094505499691756946329466238\
029256908317387659245893361869285485179777099016847\
012698558309358412176001}
```

Contoh 4.12

```
NRroots[x^17 - x + 3 == 0, x]
```

```
x == -1.08633 || x == -1.00984 - 0.397987 i ||
x == -1.00984 + 0.397987 i || x == -0.791853 - 0.738446 i ||
x == -0.791853 + 0.738446 i ||
x == -0.465012 - 0.972816 i || x == -0.465012 + 0.972816 i ||
x == -0.0778989 - 1.06912 i || x == -0.0778989 + 1.06912 i ||
x == 0.312905 - 1.017 i || x == 0.312905 + 1.017 i ||
x == 0.65254 - 0.829137 i || x == 0.65254 + 0.829137 i ||
x == 0.897877 - 0.537805 i || x == 0.897877 + 0.537805 i ||
x == 1.02444 - 0.185664 i || x == 1.02444 + 0.185664 i
```

```
Clear[f, x];
```

```
f[x_] := x^17 + 3;
```

```
NestList[f, 11, 2]
```

```
{11, 505447028499293774,
9172463890397559742447889675452121734742766342760937\
869901351602640126948390278198041667828389295161056\
931668523399723116579927183111458423316178667907458\
116190422105310912470730553557159883239653587874964\
615086743106522647224287366834074842152533740117835\
971387660501571862813139730697592290851815427}
```

Contoh 4.13

```
NRoots[5 x^13 - x + 9 == 0, x]  
  
x == -1.05521 || x == -0.931667 - 0.493524 i ||  
x == -0.931667 + 0.493524 i ||  
x == -0.591409 - 0.869682 i || x == -0.591409 + 0.869682 i ||  
x == -0.117197 - 1.04124 i || x == -0.117197 + 1.04124 i ||  
x == 0.378375 - 0.972278 i || x == 0.378375 + 0.972278 i ||  
x == 0.782266 - 0.684156 i || x == 0.782266 + 0.684156 i ||  
x == 1.00724 - 0.245737 i || x == 1.00724 + 0.245737 i
```

```
Clear[f, x];  
f[x_] := 5 x^13 + 9;  
NestList[f, 13, 2]  
  
{13, 1514375532961274,  
1101556051249038690360127929711297048870366438007691\  
925139058743049449274354721253510464423305667892791\  
199461729867609467042407223449646754156173773429869\  
124265800386387735644406790530301664345989129}
```

Contoh 4.14

```
NRoots[x^21 - x == 0, x]
```

```
x == -1. || x == -0.951057 - 0.309017 i ||
x == -0.951057 + 0.309017 i ||
x == -0.809017 - 0.587785 i || x == -0.809017 + 0.587785 i ||
x == -0.587785 - 0.809017 i || x == -0.587785 + 0.809017 i ||
x == -0.309017 - 0.951057 i || x == -0.309017 + 0.951057 i ||
x == -5.00323 x 10^-17 - 1. i || x == -5.00323 x 10^-17 + 1. i ||
x == 0. || x == 0.309017 - 0.951057 i ||
x == 0.309017 + 0.951057 i || x == 0.587785 - 0.809017 i ||
x == 0.587785 + 0.809017 i || x == 0.809017 - 0.587785 i ||
x == 0.809017 + 0.587785 i || x == 0.951057 - 0.309017 i ||
x == 0.951057 + 0.309017 i || x == 1.
```

```
Clear[f, x];
```

```
f[x_] := x^21;
```

```
NestList[f, 9, 2]
```

```
{9, 109418989131512359209,
6621351795197746384958220495894835051799919322668003\
235604140499602511981664103035246160746891589658257\
901949193642217421563257213245455784258613640623796\
990245951939047980447693207289228086554695471740243\
070869290487548822410907248197952598083903720221624\
692839969056575454446523322416653911268575540728636\
773735879627986707911791301711180170156622947951421\
050725973655905155715243509982334864266124046820321\
927357662409}
```

