PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL
JENIS MATHIEU-HILL

SKRIPSI

Diajukan dalam Rangka penyelesaian Studi Strata I
Untuk Mencapai gelar Sarjana Sains

Disusun Oleh :

Nama : Woro Raharjanti
NIM : 4150401027
Prodi : Matematika S1
Jurusan : Matematika

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI SEMARANG

2005

HALAMAN PENGESAHAN

Telah dipertahankan dihadapan Sidang Panitia Ujian Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri semarang pada :

Hari :

Tanggal :

Panitia Ujian

Ketua

Drs. Kasmadi Imam ,S. M.Si
NIP. 130781011

Sekretaris

Drs. Supriyono, M.Si
NIP. 130815345

Pembimbing Utama

Dr. St. Budi Waluya
NIP. 132046848

Pembimbing Pendamping

Drs. Moch. Chotim, M.Si
NIP. 130781008

Anggota Penguji

1. Drs. Wuryanto, M.Si
   NIP. 131281225

2. Dr. St. Budi Waluya
   NIP. 132046848

3. Drs. Moch. Chotim, M.Si
   NIP. 130781008

ABSTRAK

Berbagai masalah fisis dan geometri yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Salah satu analisis fisis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial, yaitu $\frac{d^2y}{dt^2}+F(t)y=0$, dengan F(t) suatu fungsi periodik. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan diferensial Hill. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial Hill yang terikat oleh syarat-syarat awal apabila penyelesaiannya tidak harus periodik dapat menggunakan metode matriks. Selain itu juga dapat menggunakan program *Maple* untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan masalah persamaan diferensial dan aljabar.

Berdasarkan hal tersebut permasalahan yang dapat diambil adalah (1) Bagaimana prosedur penggunaan metode matriks untuk menyelesaikan persamaan diferensial Hill ? (2) Bagaimana aplikasi progam *Maple* untuk visualisasi persamaan diferensial Hill. Tujuan dari penelitian ini adalah (1) Dapat mengetahui cara penggunaan aljabar matriks dalam menyelesaikan persamaan diferensial Hill. (2) Dapat mengetahui aplikasi program *Maple* untuk visualisasi persamaan diferensial Hill.

Untuk mencapai tujuan di atas, penelitian dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut. (1) Menemukan masalah dengan cara mencari sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan. (2) Merumuskan masalah yang sesuai dengan permasalahan yang ditemukan. (3) Mengkaji sunber-sumber pustaka yang berkaitan dengan permasalahan. (4) Menyelesaikan persamaan diferensial Hill dengan metode matriks dan mengaplikasikannya dalam program *Maple*. (5) Penarikan simpulan berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya.

Dengan menggunakan metode matriks diperoleh penyelesaian persamaan diferensial Hill pada sembarang waktu $t > 0$ yang dinyatakan dalam nilai-nilai awal untuk $y(t)$ dan $\dot{y}(t)=v(t)$ dengan dua penyelesaian bebas linier adalah sebagai berikut. (1) Pada saat t = 0, $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$. (2) Pada saat t = T, $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$. (3) Pada akhir periode kedua dari perubahan $F(t)$, $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{2T} = \left(\frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\right)^2\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$.
(4) Pada akhir periode ke-*n* dari perubahan *F(t)*,

$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \left(\frac{1}{|W_0|} \begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$. (5) Pada akhir periode ke-*(n+1)* dari perubahan *F(t)*, $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT+\tau} = \begin{bmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ \dot{u}_1(\tau) & \dot{u}_2(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT}$.

Simpulan dari hasil pembahasan adalah, penginterpretasian hasil *output* dari program *Maple* identik dengan interpretasi hasil penyelesaian secara manual. Sedangkan saran yang dapat dituliskan adalah, perlu adanya penelitian lebih lanjut pada penyelesaian persamaan diferensial Hill dengan masalah nilai batas.

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

M0TTO

- ☺ **Perbedaan antara orang yang sukses dan yang gagal bukan terletak pada besarnya kekeuatan dan pengetahuan, tetapi lebih dari itu; yaitu karena besarnya kemauan.**
- ☺ **Halangan yang terbentang di depan bukan untuk dihindari, tetapi untuk dipikirkan bagaimana melaluinya.**

Atas Rahmat dan Ridlo Allah SWT, skripsi ini kupersembahkan :

- ☺ **Ayah Ibuku tercinta**
- ☺ **Mas Eko dan dik Pujo yang kusayangi**
- ☺ **Mbah dan keluarga besar Karanggede yang kusayangi**

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul " Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill".

Penulisan skripsi ini dapat terwujud karena adanya bimbingan, bantuan serta dukungan dari berbagai pihak. Tidaklah terlalu berlebihan bila penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada :

1. Drs. Kasmadi Imam S, Ms. Dekan FMIPA Universitas Negeri Semarang.
2. Drs. Supriyono, M.Si. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Semarang.
3. Dr. St. Budi Waluya. Dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan motivasi kepada penulis.
4. Drs. M. Chotim, MS. Dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing dan memberikan motivasi kepada penulis.
5. Ayah dan Ibu serta keluarga besar Karanggede yang senantiasa mendoakan serta memberikan dorongan baik secara moral maupun spiritual dan segala yang ternilai.
6. Saudara-saudaraku Een, Wahyu, dan semua penghuni kos X^2 yang selalu memberikan semangat dan hiburan hingga selesainya skripsi ini.
7. Sahabat-sahabatku Taufik, Sigit, Dwi, Rina, dan anak-anak Mat'01 yang telah memberikan hari-hari penuh keindahan kepada penulis.

Serta orang-orang yang telah memberikan inspirasi, baik disengaja maupun tidak, serta pihak-pihak yang telah memberikan segala dukungan baik langsung maupun tidak langsung, material maupun immaterial, hingga proses penyusunan skripsi ini berjalan dengan lancar.

Penulis menyadari apa yang telah disusun dan disampaikan masih jauh dari sempurna dan banyak kekurangannya. Untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis akan menerima segala kritik dan saran demi kesempurnaan skripsi ini. Besar harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua.

Semarang,   Agustus 2005

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

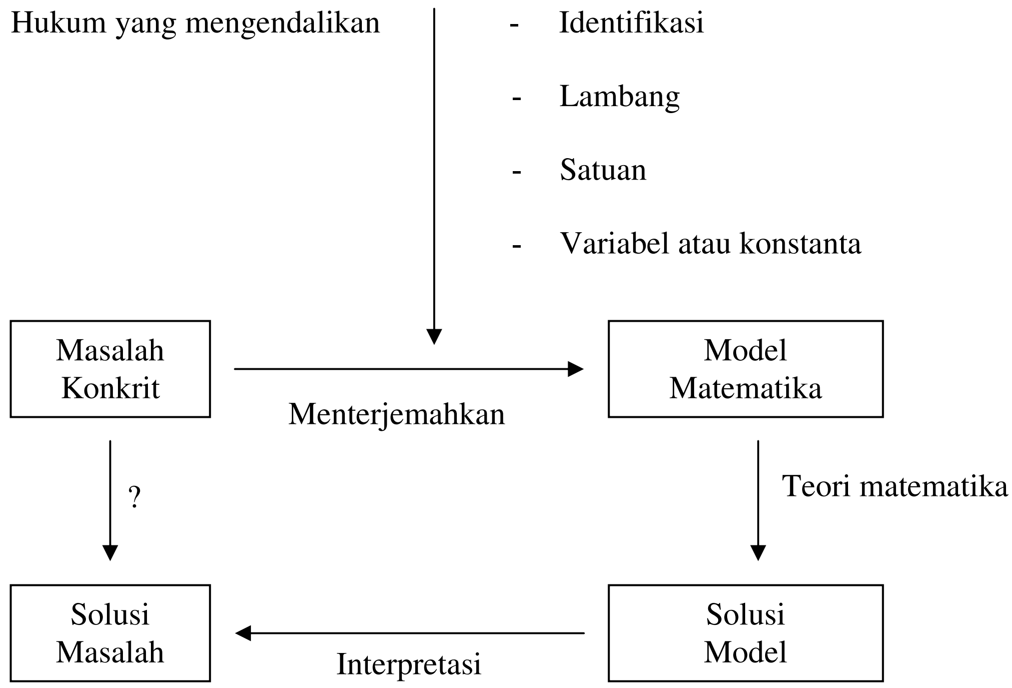
A. LATAR BELAKANG MASALAH

Matematika adalah salah satu cabang ilmu pengetahuan yang konsep dasarnya digunakan untuk pengembangan ilmu-ilmu yang lain. Matematika senantiasa dikaji dan dikembangkan agar dapat dimanfaatkan di dalam aspek penerapannya. Masalah-masalah dalam dunia nyata dapat lebih mudah dimengerti dengan menggunakan pendekatan matematik. Pada umumnya untuk menentukan solusi dari masalah-masalah tersebut diperlukan suatu pemodelan matematika.

Adapun langkah-langkah dalam membangun model matematika sebagai berikut.

1. Mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah tersebut.
2. Memberi lambang pada semua besaran.
3. Menentukan satuan untuk semua besaran.
4. Menentukan besaran mana yang merupakan konstanta dan mana yang merupakan variabel.
5. Menentukan hubungan antara variabel dan konstanta sehingga dapat disusun menjadi suatu model matematika.
6. Mencari solusi model berdasarkan teori-teori dalam matematika.
7. Menginterpretasikan solusi model yang memunculkan solusi masalah.

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gb. 1.



Gb. 1. Langkah-Langkah Membangun Model Matematika

Salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak digunakan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu (atau beberapa) turunan fungsi yang tak diketahui. Suatu persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (Rochmad, 2002 : 3).

Dalam berbagai masalah fisik dan geometri yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Untuk masalah fisik yang paling sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah fisik yang lain seperti mekanika fluida, mekanika padat, teori elekromagnetik, teori potensial, difusi dan sebagainya merupakan masalah-masalah fisik yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Salah satu analisis matematis dari masalah fisis tersebut dapat menghasilkan suatu persamaan diferensial yang dapat disederhanakan ke bentuk umum berikut.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + F(t)y = 0\,, \tag{1}$$

dengan F(t) suatu fungsi periodik bernilai tunggal dengan periode pokok T yang dapat disajikan dengan deret Fourier umum yang berbentuk

$$F(t) = A_0 + \sum_{1}^{x} A_n \cos nwt + \sum_{1}^{x} B_n \sin nwt\,, \tag{2}$$

dengan $w = \frac{2\pi}{T}$.

Jika ekspansi deret Fourier untuk F(t) berubah menjadi bentuk sederhana

$$F(t) = A_0 + A_1 \cos wt\,, \tag{3}$$

maka persamaan (1) dikenal sebagai persamaan diferensial Mathieu. Jika fungsi F(t) suatu fungsi periodik, maka persamaan (1) dikenal sebagai persamaan diferensial Hill (Pipes, 1991 : 911).

Sifat dasar analisis yang timbul dari penerapan-penerapan praktis menunjukan bahwa analisis tersebut dapat dibagi dalam dua kategori utama. Kategori pertama adalah masalah-masalah yang menimbulkan persamaan (1) sebagai akibat dari pemisahan variabel suatu masalah nilai batas. Dalam hal ini penyelesaian yang sesuai dituntut merupakan fungsi periodik. Sedangkan dalam kategori kedua dijumpai masalah-masalah yang dapat dipandang sebagai masalah nilai awal yang di dalamnya melibatkan persamaan (1). Dalam hal ini penyelesaian-penyelesaian tidak terbatas pada penyelesaian periodik.

Dalam penulisan ini akan menyajikan suatu metode penyelesaian persamaan (1) yang terikat oleh syarat-syarat awal yang ditentukan apabila penyelesaiannya tidak disyaratkan harus periodik. Metode yang disajikan dapat menyederhanakan penyelesaian persamaan (1) yang terikat oleh syarat-syarat awal yang diberikan. Selain itu dengan menggunakan matriks dapat diperoleh solusi masing-masing persamaan diferensial yang membangun sistem persamaan diferensial secara bersamaan.

Dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial akan lebih mudah dan cepat apabila digunakan suatu alat bantu seperti komputer. Akhir-akhir ini perkembangan perangkat lunak komputer yang berbasis matematika sangatlah pesat. Hal ini terbukti dengan munculnya perangkat lunak yang dapat digunakan untuk kepentingan pengembangan matematika maupun penerapannya. Salah satu perangkat lunak yang dikembangkan untuk kepentingan Sistem Komputer Aljabar (*Computer Algebaric System*) adalah *Maple*. *Maple* banyak digunakan oleh para ilmuwan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika, karena *Maple* merupakan perangkat lunak yang lengkap dan komunikatif pada jenisnya. Permasalahan yang dapat diselesaikan dengan *Maple* merupakan permasalahan matematika murni, seperti aljabar, geometri, kalkulus, matematika diskret, dan statistika. Berdasarkan hal tersebut di atas penulis tertarik untuk mengetahui bagaimana penggunaan aljabar matriks dalam menyelesaikan persamaan Hill dan penggunaan *Maple* untuk visualisasinya. Sehingga dalam penulisan skripsi ini penulis mengambil judul **“ Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill”**.

B. PERMASALAHAN

Permasalahan yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah, sebagai berikut.

1. Bagaimana prosedur penggunaan metode matriks untuk menyelesaikan persamaan diferensial Hill ?
2. Bagaimana aplikasi program Maple untuk visualisasi persamaan diferensial Hill ?

C. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini adalah, sebagai berikut.

1. Dapat mengetahui cara penggunaan aljabar matriks dalam menyelesaikan persamaan diferensial Hill.
2. Dapat mengetahui aplikasi program Maple untuk visualisai persamaan diferensial Hill.

D. MANFAAT PENELITIAN

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah, sebagai berikut.

1. Membantu mahasiswa dalam mempelajari penyelesaian persamaan diferensial Hill dengan menggunakan aljabar matriks sekaligus menambah pengetahuan dalam penggunaan program Maple untuk visualisasinya.

2. Menambah perbendaharaan ilmu dan materi persamaan diferensial di jurusan matematika FMIPA UNNES.

E. SISTEMATIKA PENULISAN SKRIPSI

Penulisan skripsi ini secara garis besar dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian awal, bagian isi, dan bagian akhir.

Bagian awal, memuat halaman judul, abstrak, halaman pengesahan, halaman motto dan persembahan, kata pengantar, daftar isi, dan daftar gambar.

Bagian isi terbagi atas 5 bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Membahas tentang alasan pemilihan judul, permasalahan yang diangkat, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan skripsi.

BAB II LANDASAN TEORI

Mencakup pembahasan materi-materi pendukung yang digunakan dalam pemecahan masalah.

BAB III METODE PENELITIAN

Memaparkan tentang prosedur atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi menemukan masalah, perumusan masalah, studi pustaka, analisis dan pemecahan masalah, penarikan simpulan.

BAB IV PEMBAHASAN

Dalam bab ini berisi pembahasan dan analisis dari hasil penelitian.

BAB V PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang ditujukan untuk pembaca umumnya dan bagi penulis sendiri khususnya.

Bagian akhir memuat daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang mendukung kelengkapan skripsi ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial diperoleh berdasarkan pemodelan matematika dari permasalahan yang ada di dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh penerapan matematika pada ilmu fisika, persamaan diferensial dari hukum Newton II yang timbul karena gejala alam, bahwa massa kali percepatan dari suatu benda sama dengan gaya luar yang bekerja pada benda itu. Misalkan benda bermassa m bergerak sepanjang sumbu y pada sistem koordinat kartesius maka hukum Newton II dapat dituliskan sebagai

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F \ , \tag{4}$$

dengan F melambangkan gaya luar yang bekerja pada benda itu. Persamaan (4) merupakan persamaan diferensial karena memuat turunan dari fungsi yang tidak diketahui $y(t)$ dengan y sebagai variabel terikat yang tergantung pada variabel bebas t. Jadi persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel terikat yang tergantung pada satu atau lebih variabel bebas. Beberapa contoh dari persamaan diferensial:

(1) $\frac{dy}{dt} = 2t + 10$,

(2) $\frac{d^4y}{dt^4} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 3y = \sin t$,

(3) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0$, dan

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$.

Suatu persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih varibel terikat yang tergantung pada varabel bebas tunggal disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel terikat yang tergantung pada variabel bebas yang tidak tunggal disebut persamaan diferensial parsial. Contoh 1 dan Contoh 2 adalah persamaan diferensial biasa, sedangkan Contoh 3 dan Contoh 4 merupakan persamaan diferensial parsial.

Orde dari persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan tersebut. Contoh 1 dan Contoh 3 adalah persamaan diferensial orde satu, persamaan (4) merupakan persamaan diferensial orde dua, sedangkan persamaan (2) adalah persamaan diferensial orde empat.

Secara umum persamaan diferensial berorde n dapat dituliskan sebagai

$$F\left[t, u(t), u^1(t), \ldots, u^n(t)\right] = 0. \qquad (5)$$

Notasi di atas menyatakan hubungan antara varibel bebas t dan nilai-nilai dari fungsi $u, u(t), u^1(t), \ldots, u^n(t)$.

Suatu fungsi *y(t)* yang didefinisikan pada suatu interval dikatakan solusi suatu persamaan diferensial bila untuk variabel bebas *t*, maka nilai-nilai *y(t)* dan turunannya bila disubtitusikan memenuhi persamaan diferensial tersebut.

Contoh solusi persamaan diferensial:

(1) Solusi dari persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$ adalah $y = Ae^t + Be^{2t}$ dengan *A, B* sembarang konstan.

(2) Solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dt} - \frac{1}{2}y = 0$ adalah $y = Ce^{\frac{1}{2}}$, untuk *C* sembarang konstan.

Solusi pada persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum suatu persamaan diferensial adalah solusi yang mengandung sembarang konstan, sedangkan solusi khusus suatu persamaan diferensial adalah solusi yang dapat diperoleh dengan memberikan nilai tertentu pada sembarang konstan yang terdapat pada solusi umum.

Klasifikasi penting persamaan diferensial adalah apakah persamaan diferensial tersebut linier atau nonlinier. Persamaan diferensial biasa $F\left(t, y, y^1, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ dikatakan linier jika *F* adalah fungsi linier dari variabel $y, y^1, \ldots, y^{(n)}$, definisi yang sama dapat diterapkan untuk persamaan diferensial parsial. Jadi persamaan diferensial orde-n secara umum dapat ditulis sebagai

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = F(t), \qquad (6)$$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ dan *F* adalah fungsi-funsi dari *t* dan $a_0(t) \neq 0$. Jika suatu persamaan diferensial tidak dapat ditulis dalam bentuk tersebut maka dikatakan persamaan diferensial tersebut persamaan diferensial nonlinier. Contoh:

(1) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y^2 = 0$ merupakan persamaan nonlinier.

(2) $\frac{d^4y}{dt^4} + x^2\frac{d^3y}{dt^3} + x^3\frac{dy}{dt} = te^t$ merupakan persamaan linier.

(3) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5y\frac{dy}{dt} + 6y = 0$ merupakan persamaan nonlinier.

Kebanyakan persamaan diferensial nonlinier tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Cara yang tepat dalam mempelajari persamaan diferensial nonlinier beserta sistemnya adalah dengan membuat persamaan itu menjadi “linier” yaitu dengan cara menghampiri persamaan tersebut oleh persamaan diferensial linier (hampiran/aproximasi).

Berikut ini disajikan beberapa contoh mencari solusi persamaan diferensial.

(1) Perhatikan persamaan diferensial

$$\left(y+\sqrt{t^2+y^2}\right)dt - t\,dy = 0,\ y(1)=0.$$

Persamaan di atas merupakan persamaan diferensial homogen.

Jelas $\left(y+\sqrt{t^2+y^2}\right)dt - t\,dy = 0,\ y(1)=0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y+\sqrt{t^2+y^2}}{t}.$$

Dipunyai $y(1)=0$.

Jelas $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y+\sqrt{t^2+y^2}}{t}$

$$= \frac{y}{t} + \frac{|t|\sqrt{1+\left(\frac{y}{t}\right)^2}}{t}$$

$$= \frac{y}{t} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{t}\right)^2}.$$

Tulis $\dfrac{y}{t} = v$.

Jadi $\quad v + t\dfrac{dv}{dt} = v + \sqrt{1+v^2}$

$$\Leftrightarrow \quad t\frac{dv}{dt} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \frac{dt}{t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \int \frac{dt}{t}$$

$\Leftrightarrow \quad \ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| = \ln|t| + \ln|c|$, c suatu konstan

$\Leftrightarrow \quad v+\sqrt{v^2+1} = tc$, c suatu konstan

$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{t}+\sqrt{\frac{y^2}{t^2}+1} = tc$, c suatu konstan

$\Leftrightarrow \quad y+\sqrt{t^2+y^2} = t^2c$, c suatu konstan.

Dipunyai $y(1)=0$.

Jelas $y(1)+\sqrt{1^2+y^2(1)}=c$

$\Leftrightarrow \quad c=1$.

Jadi $y+\sqrt{t^2+y^2} = t^2$.

Jelas $y=\frac{1}{2}(t^2-1)$.

Jadi solusi khusus dari persamaan diferensial $\left(y+\sqrt{t^2+y^2}\right)dt - tdy = 0$

adalah $y=\frac{1}{2}(t^2-1)$.

(2) Perhatikan persamaan diferensial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}-2y=0,\ y(0)=1,\ y^1(0)=2.$$

Persamaan karakteristik persamaan diferensial tersebut adalah

$r^2+4r^2-2=0$, yang mempunyai solusi $-2+\sqrt{24}$ dan $-2-\sqrt{24}$.

Jadi $y_1(t)=e^{r_1t}=e^{\left(-2+\sqrt{24}\right)t}$, dan $y_2(t)=e^{r_2t}=e^{\left(-2-\sqrt{24}\right)t}$ merupakan suatu solusi.

Solusi umumnya merupakan suatu kombinasi linier dari $y_1(t)$ dan $y_2(t)$, yaitu : $y(t)=C_1e^{\left(-2+\sqrt{24}\right)t}+C_2e^{\left(-2-\sqrt{24}\right)t}$, C_1 dan C_2 konstan.

Dipunyai $y(0)=1$.

Jelas $C_1+C_2=1$. (1)

Dipunyai $y^1(0)=2$.

Jelas $\left(-2+\sqrt{24}\right)C_1+\left(-2-\sqrt{24}\right)C_2=2$. (2)

Persamaan (1) disubtitusikan ke persamaan (2),

jadi $C_1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{24}}$ dan $C_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{\sqrt{24}}$.

Dengan mensubtitusikan nilai C_1 dan C_2 ke persamaan solusi umum diperoleh

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)e^{\left(-2+\sqrt{24}\right)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)e^{\left(-2-\sqrt{24}\right)t}.$$

Jadi solusi khususnya adalah

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)e^{\left(-2+\sqrt{24}\right)t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{24}}\right)e^{\left(-2-\sqrt{24}\right)t}.$$

B. PERSAMAAN DIFERENSIAL HILL

Analisis matematis berbagai macam masalah fisis menghasilkan suatu perumusan menyangkut persamaan diferensial yang dapat disederhanakan ke dalam bentuk

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0, \tag{7}$$

dengan *F(t)* suatu fungsi *periodik* bernilai tunggal dengan periode pokok *T* yang dapat disajikan dengan deret Fourier umum yang berbentuk

$$F(t) = A_0 + \sum_{1}^{y} A_n \cos nwt + \sum_{1}^{y} B_n \sin nwt, \tag{8}$$

dengan $w = \frac{2\pi}{T}$.

Jika ekspansi deret Fourier untuk *F(t)* berubah menjadi bentuk sederhana

$$F(t) = A_0 + A_1 \cos wt, \tag{9}$$

maka persamaan (7) dikenal sebagai persamaan diferensial *Mathieu*. Jika fungsi *F(t)* suatu fungsi periodik dengan bentuk umum (8), persamaan (7) dikenal sebagai persamaan diferensial *Hill*.

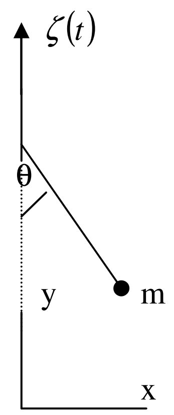
Pada dasarnya bentuk umum dari persamaan diferensial Hill adalah sebagai berikut.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0, \tag{10}$$

dengan $F(t) = F(t+T)$, $\forall$ t (Grimshaw, 1990 : 56).

Berikut diberikan beberapa contoh dari persamaan Hill :

1. Penerapan persamaan Hill dalam sistem fisika, misalkan pendulum sederhana yang bergerak sepanjang garis vertikal dengan periode T dan θ sebagai sudut antara garis vertikal dengan gerakan pendulum, seperti pada Gb. 2.



Gb. 2. Pendulum sederhana

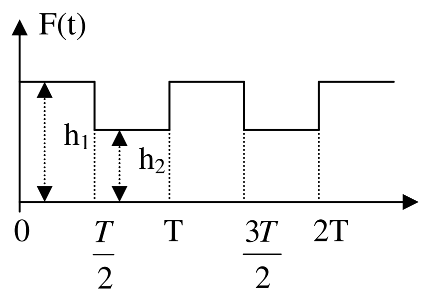
Dari Gb. 2. persamaan gerak pendulum kearah garis vertikal, ketika $|\theta| \leq 1$, dapat ditulis dalam suatu persamaan dengan bentuk

$$\theta^{11} + \left(\omega^2 + \zeta^{11}\right)\theta = 0, \tag{11}$$

dengan $\omega^2 = \frac{g}{l}$, l adalah panjang bandul, g adalah gaya percepatan gravitasi. Dan *ζ(t)* merupakan persamaan titik puncak dari pendulum yang digerakkan menuju garis vertikal (Grimshaw, 1990 : 57).

2. Persamaan Hill-Meissner

Persamaan Hill (7) dalam keadaan khusus dengan *F(t)* berbentuk riak persegi panjang pada Gb. 3. digunakan oleh Meissner dalam analisisnya tentang getaran batang penggerak lokomotif.



Gb. 3. Fungsi *F(t)* yang berbentuk riak persegi panjang

Dimisalkan T adalah periode pokok riak persegi panjang, dan h adalah tinggi riak, sehingga persamaan Hill (7) berubah menjadi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + hy = 0\,,\ 0 \le t \le T\,. \tag{12}$$

(Pipes, 1991 : 920)

C. ALJABAR MATRIKS

Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom, sehingga berbentuk persegi panjang. Bilangan-bilangan yang terdapat dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton, 1987 : 22).

Sebuah matriks $A = \left(a_{ij}\right)$, i= 1,2,…,m dan j= 1,2,…,n dengan banyaknya baris = m serta banyaknya kolom = n dinotasikan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \tag{13}$$

dapat pula ditulis sebagai matriks A_{mxn} dimana mxn disebut ukuran (ordo) dari matriks *A*. Apabila matriks tersebut mempunyai baris = kolom = n yang berukuran n (berordo n) maka matriks tersebut dikatakan matriks persegi atau matriks kuadrat.

Misalkan A sebuah matriks mxn dan B sebuah matris nxp (banyak kolom A sama dengan banyak baris B) maka hasil kali AB adalah matriks mxp yang didefinisikan sebagai berikut.

$$AB(i,k) = \sum_{1}^{n} A(i,j)B(j,k), \tag{14}$$

dengan i= 1,2,3,…,m dan k= 1,2,3,…,p. Entri-entri dalam AB ditentukan dengan cara menjumlahkan hasil kali entri-entri yang bersesuaian dari baris i dalam A dengan kolom j dalam B. Jika banyak kolom di A tidak sama dengan banyak baris di B maka hasil kali AB tidak dapat didefinisikan.

Suatu determinan ordo n adalah skalar yang dihubungkan dengan matriks persegi $\lfloor a_{ij} \rfloor_{(nxn)}$ dinotasikan sebagai

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

juga dapat ditulis dalam bentuk

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Susunan bilangan-bilangan yang berbentuk persegi yang dibatasi 2 garis vertikal dengan entri-entri a_{ij} yang didefinisikan kemudian dilambangkan dengan $|A|$. Istilah-istilah yang perlu didefinisikan dalam teori determinan adalah:

1) Minor

Apabila baris ke-i dan kolom ke-j pada persamaan (16) dihapuskan maka akan diperoleh determinan baru. Determinan baru ini didefinisikan sebagai minor unsur a_{ij}. Sebagai contoh jika $|A|$ suatu determinan berordo 5,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

maka minor unsur a_{32} dinyatakan dengan M_{32},

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

2) Kofaktor

Kofaktor unsur a_{ij} suatu determinan adalah minor unsur a_{ij} dengan disertai tanda padanya, ditentukan oleh bilangan i dan j yang menetapkan letak a_{ij} dalam determinan $|A|$.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \tag{17}$$

dengan C_{ij} kofaktor unsur a_{ij} dan M_{ij} minor unsur a_{ij}.

3) Penghitungan determinan suatu matriks

Determinan matriks persegi berordo nxn dapat ditentukan dengan rumus

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \ . \tag{18}$$

Invers suatu matriks $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ yang berordo nxn dinyatakan oleh A^{-1} yang merupakan matriks berordo nxn sehingga $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Invers suatu matriks dapat ditentukan dengan menggunakan rumus berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A), \qquad (19)$$

dengan

A^{-1} = Invers dari A

Det (A) = Determinan dari A

Adj (A) = Cof $(A)^t$.

Transpos dari matriks A yang berordo mxn adalah suatu matriks yang berordo nxm dengan kolomnya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga yang merupakan baris ketiga dari A, dan seterusnya sesuai dengan ordo dari matriks A. Transpos matriks A dinyatakan dengan A^t. Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

Definisi:

Sebuah vektor W dikatakan kombinasi linier dari vektor-vektor $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ jika vektor W dapat dinyatakan dalam bentuk

$$W = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 + \cdots + k_n v_n,$$

untuk suatu skalar $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ (Anton. 1987 : 145).

Contoh :

Dipunyai $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tunjukkan $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ merupakan kombinasi linier dari v_1 dan v_2.

Penyelesaian :

Akan ditunjukkan W kombinasi linier dari v_1 dan v_2.

Bentuk $W = k_1 v_1 + k_2 v_2$.

Jelas $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \; 3 = k_2$ (1)

$\Leftrightarrow \; 1 = -2k_1 + 3k_2$ (2)

$\Leftrightarrow \; 5 = 2k_1 - 1k_2$. (3)

Subtitusi (1) ke (2).

Jelas $1 = -2k_1 + 3(3)$

$\Leftrightarrow \quad 1 = -2k_1 + 9$

$\Leftrightarrow \quad -8 = -2k_1$

$\Leftrightarrow \quad k_1 = 4$.

Jadi $\exists k_1, k_2 \ni W = 4v_1 + 3v_2$.

Dengan kata lain W merupakan kombinasi linier dari v_1 dan v_2.

Definisi :

Jika $V = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\} \neq \phi$, maka persamaan vektor

$$k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \cdots + k_nu_n = 0,$$

mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni

$$k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0.$$

Jika persamaan $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \cdots + k_nu_n = 0$ hanya mempunyai pemecahan trivial yaitu $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_n = 0$ maka V dikatakan himpunan bebas linier. Jika persamaan $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \cdots + k_nu_n = 0$ mempunyai pemecahan non trivial maka V dikatakan himpunan bergantung linier (Anton. 1987 : 151).

Contoh :

Buktikan $V = \{\sin x, \cos x\}$ bebas linier.

Bukti :

Ambil sembarang $k_1, k_2 \in R$.

Jelas k_1 *ain* $x + k_2 \cos x = 0$.

Akan dibuktikan $k_1 = k_2 = 0$.

Andaikan $k_1 \neq 0 \vee k_2 \neq 0$.

Jelas k_1 *ain* $x + k_2 \cos x = 0$ dan

$-k_2 \sin x + k_1 \cos x = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kasus $k_1 \neq 0 \wedge k_2 = 0$:

Jelas $k_1 \sin x = 0$ dan

$k_1 \cos x = 0.$

Ini suatu kontradiksi.

Kasus $k_1 = 0 \wedge k_2 \neq 0$:

Jelas $k_2 \cos x = 0$ dan

$-k_2 \sin x = 0.$

Ini suatu kontradiksi.

Jadi yang benar haruslah $k_1 = k_2 = 0.$

Jadi $V = \{\sin x, \cos x\}$ bebas linier.

Definisi :

Jika f_1, f_2, …, f_n masing-masing bernilai real dengan satu variabel dan mempnuyai turunan sampai ke-$(n\text{-}1)$ pada interval $a \le x \le b$. Maka determinan wronskian dari kumpulan f_1, f_2, …, f_n yang dinotasikan sebagai

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{1} & f_2^{1} & \cdots & f_n^{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

yang dinotasikan sebagai turunan pertama dikatakan determinan Wronskian dari fungsi n. Kita perhatikan bahwa $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ adalah fungsi real yang didefinisikan pada $a \le x \le b$. Determinan Wronskian nilai x dinyatakan dengan $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x)$ atau $W[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$ (Ross, 1989: 111-112).

Teorema :

Dipunyai $S=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n\}$ u_i mempunyai turunan sampai ke-*(n-1)* dan $u_i \neq 0\ \forall\ i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Buktikan det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n \neq 0 \Leftrightarrow$ S bebas linier.

Bukti :

$\Rightarrow$ Dipunyai det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n \neq 0$.

Ambil sembarang $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n \in R$.

Jelas $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n = 0$

$k_1u_1^1 + k_2u_2^1 + k_3u_3^1 + \ldots + k_nu_n^1 = 0$

$\vdots$

$k_1u_1^{(n-1)} + k_2u_2^{(n-1)} + k_3u_3^{(n-1)} + \ldots + k_nu_n^{(n-1)} = 0.$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dipunyai det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n \neq 0$.

Jelas $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$, mempunyai invers.

Jadi $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Jelas $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dengan kata lain $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$.

Jadi S bebas linier.

$\Leftarrow$ Dipunyai S bebas linier.

Jelas $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n = 0$

$k_1u_1^{1} + k_2u_2^{1} + k_3u_3^{1} + \ldots + k_nu_n^{1} = 0$

$\vdots$

$k_1u_1^{(n-1)} + k_2u_2^{(n-1)} + k_3u_3^{(n-1)} + \ldots + k_nu_n^{(n-1)} = 0,$

dengan $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$.

Andaikan det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n = 0$.

Jelas $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + \ldots + k_nu_n = 0$

$k_1u_1^{1} + k_2u_2^{1} + k_3u_3^{1} + \ldots + k_nu_n^{1} = 0$

$\vdots$

$k_1u_1^{(n-1)} + k_2u_2^{(n-1)} + k_3u_3^{(n-1)} + \ldots + k_nu_n^{(n-1)} = 0,$

mempunyai penyelesaian yang tidak tunggal.

Ini suatu kontradiksi.

Jadi yang benar adalah det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n \neq 0$.

Jadi det Wronskian $u_1, u_2, \ldots, u_n \neq 0 \Leftrightarrow$ S bebas linier.

D. MAPLE

Maple merupakan salah satu perangkat lunak yang dikembangkan oleh Waterloo Inc. Kanada untuk keperluan Sistem Komputer Aljabar (*Computer Algebraic System*). Menu-menu yang terdapat pada tampilan Maple hampir sama dengan menu standar yang dikembangkan untuk program aplikasi pada sistem windows, seperti menu *File, Edit, View, Insert, Format, Spreadsheet, Option, Window, dan Help*.

Maple sering digunakan untuk keperluan penyelesaian permasalahan persamaan diferensial dan visualisasinya. Maple memiliki kemampuan untuk menyederhanakan persamaan, sehingga suatu solusi persamaan diferensial dapat dipahami dengan baik. Keunggulan lain dari Maple dalam aplikasi persamaan diferensial adalah kemampuan melakukan animasi (gerakan) grafik dari suatu fenomena gerakan yang dimodelkan ke dalam persamaan diferensial yang memiliki nilai awal dan syarat batas.

Bahasa yang digunakan pada Maple merupakan bahasa pemograman yang sekaligus sebagai bahasa aplikasi, sebab pernyataan atau statement yang merupakan input pada Maple berupa deklarasi pada bahasa program dan perintah yang sering digunakan pada bahasa aplikasi.

Statement yang sering digunakan untuk keperluan menyelesaikan permasalahan persamaan matriks antara lain: *matrix(m,n,L)* digunakan untuk mendefinisikan matriks yang berordo mxn, *solve* digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan untuk sekumpulan variabel, *simplify* digunakan untuk menyederhanakan ekspresi aljabar. Sedangkan untuk mendifernsialkan suatu fungsi digunakan statement *Diff*. Namun pernyataan-pernyataan awal seperti *restart* dan deklarasi variabel/konstant yang diperlukan tidak boleh diabaikan. Untuk membuat grafik pada maple digunakan perintah *plot, plot 2d, plot 3d* tergantung dimensi dari pernyataan yang dimiliki. Untuk membuat gerakan animasi digunakan perintah *animate 3d*. Setiap perintah pada Maple harus dituliskan setelah tanda Maple prompt yang diakhiri dengan tanda titik dua (bila hasilnya tidak akan ditampilkan) atau titik koma (bila hasilnya akan ditampilkan) (Kartono, 2001 : 1).

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini metode yang penulis gunakan adalah metode studi pustaka. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

A. Menemukan Masalah

Dalam tahap ini dilakukan pencarian sumber pustaka dan memilih bagian dalam sumber pustaka tersebut yang dapat dijadikan sebagai permasalahan.

B. Merumuskan Masalah

Tahap ini dimaksudkan untuk memperjelas permasalahan yang telah ditemukan, yaitu:

1. Bagaimana prosedur penggunaan metode matriks untuk menyelesaikan persamaan diferensial Hill ?
2. Bagaimana aplikasi program Maple untuk visualisasi persamaan diferensial Hill ?

C. Studi Pustaka

Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan. Sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

D. Analisis dan Pemecahan Masalah

Analisis dan pemecahan masalah dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menyelesaikan persamaan Hill dengan menggunakan aljabar matriks.
2. Mengaplikasikan program Maple untuk visualisasi persamaan Hill.

E. Penarikan Simpulan

Tahap ini merupakan tahap akhir dari penelitian. Penarikan simpulan dari permasalahan yang dirumuskan berdasarkan studi pustaka dan pembahasannya.

BAB IV

PEMBAHASAN

A. PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL HILL DENGAN MENGGUNAKAN ALJABAR MATRIKS

Berikut diberikan penyelesaian persamaan (7) apabila dinyatakan dalam nilai-nilai awal untuk $y(t)$ dan $\dot{y}(t) = v(t)$ dengan menggunakan metode matriks.

Misal $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ merupakan dua solusi bebas linier dari persamaan fungsi $F(t)$. Dengan demikian solusi umum dari persamaan

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + F(t)y = 0, \; 0 \le t \le T, \tag{23}$$

adalah $y(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t)$. Jadi $y(t)$ dan $v(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk

$y(t) = A_1 u_1(t) + A_2 u_2(t)$, dan

$$v(t) = A_1 \dot{u}_1(t) + A_2 \dot{u}_2(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{24}$$

Persamaan (24) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

dengan A_1 dan A_2 adalah sembarang konstant.

Untuk persamaan (25), dipunyai

$$W_0 = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Determinan Wronskian persamaan (26) adalah suatu tetapan pada selang pokok $0 \le t \le T$, yaitu

$$|W_0| = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{vmatrix} = u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t). \tag{27}$$

Jelas $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ merupakan dua solusi bebas linier dan $|W_0| \neq 0$. Jadi matriks (26) mempuyai invers.

Jelas $$\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(t) & -u_2(t) \\ -\dot{u}_1(t) & u_1(t) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Pada $t = 0$, nilai $y(t)$ dan $v(t)$ dinotasikan sebagai y_0 dan v_0. Dengan demikian persamaan (25) menjadi

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ \dot{u}_1(0) & \dot{u}_2(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ \dot{u}_1(0) & \dot{u}_2(0) \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_{12}(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Subtitusi nilai $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ pada (29) ke persamaan (25) diperoleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} \left[u_1(t)\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)u_2(t)\right] & \left[u_1(0)u_2(t) - u_1(t)u_2(0)\right] \\ \left[\dot{u}_1(t)\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)\dot{u}_2(t)\right] & \left[u_1(0)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(0)\right] \end{bmatrix}.$$

Perhatikan persamaan (23).

Tulis $\tau = t - nT$, dengan $0 \le \tau \le T$, dan $n = 0,1,2.3,...$. (31)

Jadi $\dfrac{d^2 y}{d\tau^2} + F(\tau)y = 0$, dengan $F(\tau + nT) = F(\tau)$. (32)

Jadi persamaan Hill *invarian* terhadap penggantian variabel (31). Dengan demikian jelas bahwa penyelesaian berbentuk (30) dapat diperoleh dalam setiap selang $0 \le \tau \le T$. Nilai-nilai akhir *y* dan i pada akhir satu selang perubahan nilai *F(t)* adalah nilai-nilai awal *y* dan *v* dalam selang berikutnya.

Pada akhir periode pokok *t* = *T*, persamaan (30) menjadi

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Tulis $$[M] = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$= \begin{bmatrix} \left[u_1(T)\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)u_2(T)\right] & \left[u_1(0)u_2(T) - u_1(T)u_2(0)\right] \\ \left[\dot{u}_1(T)\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)\dot{u}_2(T)\right] & \left[u_1(0)\dot{u}_2(T) - \dot{u}_1(T)u_2(0)\right] \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan notasi di atas, persamaan (33) dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = [M]\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_0. \tag{35}$$

Pada akhir periode kedua dari perubahan $F(t)$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{2T} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = [M]^2\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_0. \tag{36}$$

Demikian juga, dapat dilihat pada akhir periode ke-n, berlaku

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = [M]^n \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_0 . \tag{37}$$

Selanjutnya penyelesaian di dalam selang ke-$(n+1)$ diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT+\tau} = \begin{bmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ \dot{u}_1(\tau) & \dot{u}_2(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} . \tag{38}$$

Persamaan (38) merupakan persamaan Hill pada sembarang waktu $t > 0$ yang dinyatakan dalam syarat-syarat awal dan dua penyelesaian bebas linear persamaan Hill dalam selang pokok $0 \le t \le T$.

Contoh penyelesaian persamaan Hill (7) dalam keadaan khusus dengan *F(t)* berbentuk riak persegi panjang pada Gb. 3 yang digunakan oleh Meissner dalam analisisnya tentang getaran batang penggerak lokomotif (Persamaan Hill-Meissner).

Perhatikan persamaan Hill-Meissner berikut.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + hy = 0 ,\ 0 \le t \le T . \tag{39}$$

Solusi umum persamaan (39) adalah $y(t) = C_1 \sin\sqrt{h}t + C_2 \cos\sqrt{h}t$. Jadi nilai *y(t)* dan $\dot{y}(t) = v(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk

$y(t) = C_1 \sin\sqrt{h}t + C_2 \cos\sqrt{h}t$, dan

$v(t) = \sqrt{h}C_1 \cos\sqrt{h}t - \sqrt{h}C_2 \sin\sqrt{h}t$, $0 \le t \le T$.

Pada Gb. 3 diketahui bahwa tinggi riak berubah dari h_1 sampai h_2, maka persamaan (39) berubah menjadi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h_1 y = 0,\ 0 \le t \le \frac{T}{2}, \text{ dan} \tag{40}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + h_2 y = 0,\ \frac{T}{2} \le t \le T .$$

1. Pada selang $0 \le t \le \frac{T}{2}$.

   Dipunyai $\frac{d^2y}{dt^2} + h_1 y = 0$.

   Solusi umum : $y(t) = C_1 \sin\sqrt{h_1}t + C_2 \cos\sqrt{h_1}t$.

   Tulis $w_1 = \sqrt{h_1}$.

   Jelas $y(t) = C_1 \sin w_1 t + C_2 \cos w_1 t$, dan

$$v(t) = w_1 C_1 \cos w_1 t - w_1 C_2 \sin w_1 t . \tag{41}$$

   Persamaan (41) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin w_1 t & \cos w_1 t \\ w_1 \cos w_1 t & -w_1 \sin w_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

   Berdasarkan persamaan (30) diperoleh nilai *y(t)* dan *v(t)* pada *t = 0*, sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = -\frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} \sin w_1 t & \cos w_1 t \\ w_1 \cos w_1 t & -w_1 \sin w_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w_1 \sin 0 & -\cos 0 \\ -w_1 \cos 0 & \sin 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} \sin w_1 t & \cos w_1 t \\ w_1 \cos w_1 t & -w_1 \sin w_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -w_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{w_1} \begin{bmatrix} -w_1 \cos w_1 t & -\sin w_1 t \\ w_1^2 \sin w_1 t & -w_1 \cos w_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos w_1 t & \dfrac{\sin w_1 t}{w_1} \\ -w_1 \sin w_1 t & \cos w_1 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Selanjutnya pada $t=\frac{T}{2}$, diperoleh nilai *y(t)* dan *v(t)* sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{\frac{T}{2}} = \begin{bmatrix} \cos w_1 \frac{T}{2} & \frac{\sin w_1 \frac{T}{2}}{w_1} \\ -w_1 \sin w_1 \frac{T}{2} & \cos w_1 \frac{T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \qquad (44)$$

2. Pada selang $\frac{T}{2} \le t \le T$.

Dipunyai $\frac{d^2y}{dt^2} + h_2 y = 0$.

Solusi umum : $y(t) = C_1 \sin \sqrt{h_2} t + C_2 \cos \sqrt{h_2} t$.

Tulis $w_2 = \sqrt{h_2}$.

Jelas $y(t) = C_1 \sin w_2 t + C_2 \cos w_2 t$, dan

$v(t) = w_2 C_1 \cos w_2 t - w_2 C_2 \sin w_2 t$.

Jelas nilai y dan v pada $t=\frac{T}{2}$ adalah nilai-nilai awal y dan v dalam selang berikutnya $\frac{T}{2} \le t \le T$, maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{T} = \begin{bmatrix} \cos w_2 \frac{T}{2} & \frac{\sin w_2 \frac{T}{2}}{w_2} \\ -w_2 \sin w_2 \frac{T}{2} & \cos w_2 \frac{T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w_1 \frac{T}{2} & \frac{\sin w_1 \frac{T}{2}}{w_1} \\ -w_1 \sin w_1 \frac{T}{2} & \cos w_1 \frac{T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \qquad (45)$$

Tulis $K_1 = \cos w_1 \frac{T}{2}$, $K_2 = \cos w_2 \frac{T}{2}$, $L_1 = \sin w_1 \frac{T}{2}$, $L_2 = \sin w_2 \frac{T}{2}$.

Jelas $\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{T} = \begin{bmatrix} K_2 & \frac{L_2}{w_2} \\ -w_2 L_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & \frac{L_1}{w_1} \\ -w_1 L_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \left(K_1K_2 - L_1L_2\dfrac{w_1}{w_2}\right) & \left(K_2\dfrac{L_1}{w_1} + K_1\dfrac{L_2}{w_2}\right) \\ -\left(K_1L_2w_2 + K_2L_1w_1\right) & \left(K_1K_2 - L_1L_2\dfrac{w_2}{w_1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Tulis $[M] = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(K_1K_2 - L_1L_2\dfrac{w_1}{w}\right) & \left(K_2\dfrac{L_1}{w_1} + K_1\dfrac{L_2}{w_2}\right) \\ -\left(K_1L_2w_2 + K_2L_1w_1\right) & \left(K_1K_2 - L_1L_2\dfrac{w_2}{w_1}\right) \end{bmatrix}.$

Dengan demikian persamaan (46) berubah menjadi

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = [M]\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Jadi nilai y dan v pada akhir n periode penuh riak persegi panjang Gb. 3 tersebut, diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = [M]^n\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

B. APLIKASI PROGRAM MAPLE UNTUK VISUALISASI PERSAMAAN DIFERENSIAL HILL

Berikut akan ditampilkan penyelesaian persamaan diferensial Hill apabila dinyatakan dalam nilai-nilai awal untuk *y(t)* dan $\dot{y}(t) = v(t)$ pada selang $0 \le t \le T$ dengan menggunakan program *Maple*.

```
> restart:
> with(ODEtools):
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> H:=Diff(y(t),t,t)+F(t)*y(t)=0;
```

$$H := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + \mathrm{F}(t)\,\mathrm{y}(t) = 0$$

```
> y(t):=A1*u1(t)+A2*u2(t);
```

$$\mathrm{y}(t) := A1\,\mathrm{u1}(t) + A2\,\mathrm{u2}(t)$$

```
> v(t):=A1*Diff(u1(t),t)+A2*Diff(u2(t),t);
```

$$\mathrm{v}(t) := A1\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{u1}(t)\right) + A2\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{u2}(t)\right)$$

```
>
U(t):=vector([u1(t),u2(t)]);X(t):=matrix(2,1,[A1,A2])
;
```

$$\mathrm{U}(t) := [\mathrm{u1}(t), \mathrm{u2}(t)]$$

$$\mathrm{X}(t) := \begin{bmatrix} A1 \\ A2 \end{bmatrix}$$

```
> Wr(t):=wronskian(U(t),t);
```

$$\mathrm{Wr}(t) := \begin{bmatrix} \mathrm{u1}(t) & \mathrm{u2}(t) \\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{u1}(t) & \frac{d}{dt}\,\mathrm{u2}(t) \end{bmatrix}$$

```
> Wr1:=det(Wr(t));
```

$$Wr1 := \mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{u1}(t)\right)$$

```
> adj(Wr(t));
```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t) & -\mathrm{u2}(t) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right) & \mathrm{u1}(t) \end{bmatrix}$$

```
> B(t):=1/Wr1&*adj(Wr(t));
```

$$\mathrm{B}(t) := \frac{1}{\mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right)} \,\&*\, \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t) & -\mathrm{u2}(t) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right) & \mathrm{u1}(t) \end{bmatrix}$$

```
> Y(0):=matrix(2,1,[y,v](0));
```

$$\mathrm{Y}(0) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
>
C:=matrix(2,2,[u1(0),u2(0),Diff(u(0),t),Diff(u2(0),t)
]);
```

$$C := \begin{bmatrix} \mathrm{u1}(0) & \mathrm{u2}(0) \\ \frac{d}{dt}\mathrm{u}(0) & \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0) \end{bmatrix}$$

```
> adj(C);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0) & -\mathrm{u2}(0) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right) & \mathrm{u1}(0) \end{bmatrix}$$

```
> X(t):=1/Wr1&*(adj(C)*Y(0));
```

$$\mathrm{X}(t) := \frac{1}{\mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right)} \,\&*\, \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0) & -\mathrm{u2}(0) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right) & \mathrm{u1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

Pada $t = 0$, diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

```
> Y(t):=X(t)*Wr(t);
```

$$Y(t) := \left(\frac{1}{u1(t)\left(\frac{d}{dt}u2(t)\right) - u2(t)\left(\frac{d}{dt}u1(t)\right)} \&* \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}u2(0) & -u2(0) \\ -\left(\frac{d}{dt}u(0)\right) & u1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} u1(t) & u2(t) \\ \frac{d}{dt}u1(t) & \frac{d}{dt}u2(t) \end{bmatrix}$$

```
> P(T):=vector([u1(T),u2(T)]);
```

$$P(T) := [u1(T), u2(T)]$$

```
> P[1](T):=wronskian(P(T),T);
```

$$P_1(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{u1}(T) & \mathrm{u2}(T) \\ \frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T) & \frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T) \end{bmatrix}$$

```
> K(t):=matrix(2,1,[y,v](T));
```

$$\mathrm{K}(t) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(T) \\ \mathrm{v}(T) \end{bmatrix}$$

Pada akhir periode pokok $t = T$, penyelesaian persamaan Hill menjadi

```
> K1(t):=1/Wr1&*(P[1](T)*adj(C)*Y(0));
```

$$\mathrm{K1}(t) := \frac{1}{\mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right)} \;\&*$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{u1}(T) & \mathrm{u2}(T) \\ \frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T) & \frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0) & -\mathrm{u2}(0) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right) & \mathrm{u1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> N:=evalm(1/Wr1&*P[1](T)&*adj(C));
```

$$N := \frac{1}{\mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right)} \;\&*$$

$$\left[\mathrm{u1}(T)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0)\right) - \mathrm{u2}(T)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right), -\mathrm{u1}(T)\,\mathrm{u2}(0) + \mathrm{u2}(T)\,\mathrm{u1}(0)\right]$$

$$\left[\left(\frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0)\right) - \left(\frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right),\right.$$
$$\left.-\left(\frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T)\right)\mathrm{u2}(0) + \left(\frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T)\right)\mathrm{u1}(0)\right]$$

```
> M:=matrix(2,2,[D,E,F,G])=N;
```

$$M := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{u1}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(t)\right) - \mathrm{u2}(t)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u1}(t)\right)} \&* \\ \left[\mathrm{u1}(T)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0)\right) - \mathrm{u2}(T)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right), -\mathrm{u1}(T)\,\mathrm{u2}(0) + \mathrm{u2}(T)\,\mathrm{u1}(0) \right] \\ \left[\left(\frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0)\right) - \left(\frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T)\right)\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right), \right. \\ \left. -\left(\frac{d}{dT}\mathrm{u1}(T)\right)\mathrm{u2}(0) + \left(\frac{d}{dT}\mathrm{u2}(T)\right)\mathrm{u1}(0) \right]$$

```
> K1(T):=matrix(2,2,[D,E,F,G])*Y(0);
```

$$\mathrm{K1}(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

Pada akhir periode kedua dari perubahan *F(t)*, didapat

```
>
L(T):=matrix(2,1,[y,v](2*T))=matrix(2,2,[D,E,F,G])*K(
T);
```

$$\mathrm{L}(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(2\,T) \\ \mathrm{v}(2\,T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> P(T):=matrix(2,1,[y,v](n*T));
```

$$\mathrm{P}(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(n\,T) \\ \mathrm{v}(n\,T) \end{bmatrix}$$

Demikian juga, dapat dilihat pada akihr periode ke-*n*, berlaku

```
> P[1](T):=matrix(2,2,[D,E,F,G])^n*Y(0);
```

$$P_1(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> R(tau):=vector([u1(tau),u2(tau)]);
```

$$\mathrm{R}(\tau) := [\mathrm{u1}(\tau), \mathrm{u2}(\tau)]$$

```
> R[1](tau):=wronskian(R(tau),tau);
```

$$R_1(\tau) := \begin{bmatrix} \mathrm{u1}(\tau) & \mathrm{u2}(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}\mathrm{u1}(\tau) & \frac{d}{d\tau}\mathrm{u2}(\tau) \end{bmatrix}$$

Sedangkan penyelesaian di dalam selang ke-*(n+1)* diberikan oleh

```
>
R[2](tau):=matrix(2,1,[y,v](n*T+tau))=R[1](tau)*adj(C
)*P(T);
```

$$R_2(\tau) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(n\,T+\tau) \\ \mathrm{v}(n\,T+\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{u1}(\tau) & \mathrm{u2}(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}\mathrm{u1}(\tau) & \frac{d}{d\tau}\mathrm{u2}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\mathrm{u2}(0) & -\mathrm{u2}(0) \\ -\left(\frac{d}{dt}\mathrm{u}(0)\right) & \mathrm{u1}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(n\,T) \\ \mathrm{v}(n\,T) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian persamaan difernsial Hill-Meissner dengan menggunakan *Maple*, apabila periode pokok dinyatakan T dan tinggi riak berubah dari h_1 sampai h_2.

```
> restart:
> with(ODEtools):
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Pada selang $0 \le t \le \frac{T}{2}$.

```
> A1:=Diff(y(t),t,t)+h[1]*y(t)=0;
```

$$A1 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right) + h_1\,\mathrm{y}(t) = 0$$

```
> sol1:=dsolve(A1,y(t));
```

$$sol1 := \mathrm{y}(t) = \_C1\,\sin(\sqrt{h_1}\,t) + \_C2\,\cos(\sqrt{h_1}\,t)$$

Tulis $w_1 = \sqrt{h_1}$.

```
> y1:=sin(w[1]*t);y2:=cos(w[1]*t);
```

$$y1 := \sin(w_1\, t)$$

$$y2 := \cos(w_1\, t)$$

```
> B(t):=vector([y1,y2]);B[1](t):=matrix(2,1,[C1,C2]);
```

$$\mathrm{B}(t) := [\sin(w_1\, t), \cos(w_1\, t)]$$

$$B_1(t) := \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

```
> Wr(t):=wronskian(B(t),t);
```

$$\mathrm{Wr}(t) := \begin{bmatrix} \sin(w_1\, t) & \cos(w_1\, t) \\ \cos(w_1\, t)\, w_1 & -\sin(w_1\, t)\, w_1 \end{bmatrix}$$

```
> Wr1:=det(Wr(t));
```

$$Wr1 := -\sin(w_1\, t)^2\, w_1 - \cos(w_1\, t)^2\, w_1$$

```
> Wr1:=simplify(Wr1);
```

$$Wr1 := -w_1$$

```
> Y(t):=Wr(t)*B[1](t);
```

$$\mathrm{Y}(t) := \begin{bmatrix} \sin(w_1\, t) & \cos(w_1\, t) \\ \cos(w_1\, t)\, w_1 & -\sin(w_1\, t)\, w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

```
> B[2](t):=adj(Wr(t));
```

$$B_2(t) := \begin{bmatrix} -\sin(w_1\, t)\, w_1 & -\cos(w_1\, t) \\ -\cos(w_1\, t)\, w_1 & \sin(w_1\, t) \end{bmatrix}$$

```
> B[3](t):=evalf(subs(t=0, adj(Wr(t))));
```

$$B_3(t) := \begin{bmatrix} -0. & -1. \\ -1.\ w_1 & 0. \end{bmatrix}$$

```
> Y(0):=matrix(2,1,[y,v](0));
```

$$\mathrm{Y}(0) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> B[1](t):=1/Wr1&*(B[3](t)*Y(0));
```

$$B_1(t) := \left(-\frac{1}{w_1}\right) \&* \begin{bmatrix} -0. & -1. \\ -1.\ w_1 & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

Pada *t = 0,* diperoleh nilai *y(t)* dan *v(t)* sebagai berikut.

```
> Y(t):=1/Wr1&*(Wr(t)*B[3](t)*Y(0));
```

$$Y(t) := \left(-\frac{1}{w_1}\right) \&* \begin{bmatrix} \sin(w_1\, t) & \cos(w_1\, t) \\ \cos(w_1\, t)\, w_1 & -\sin(w_1\, t)\, w_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0. & -1. \\ -1.\ w_1 & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(t):=evalm(1/Wr1*Wr(t)&*B[3](t))*Y(0);
```

$$Y(t) := \begin{bmatrix} 1.\ \cos(w_1\, t) & \dfrac{1.\ \sin(w_1\, t)}{w_1} \\ -1.\ \sin(w_1\, t)\, w_1 & 1.\ \cos(w_1\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(T/2):=matrix(2,1,[y,v](T/2));
```

$$Y\left(\frac{T}{2}\right) := \begin{bmatrix} y\left(\dfrac{T}{2}\right) \\ v\left(\dfrac{T}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Sedangkan pada $t = \frac{T}{2}$, diperoleh nilai *y(t)* dan *v(t)* sebagai berikut.

```
> Y(T/2):=subs(t=T/2, Y(t));
```

$$Y\left(\frac{T}{2}\right) := \begin{bmatrix} 1.\ \cos\left(\frac{1}{2}\, w_1\, T\right) & \dfrac{1.\ \sin\left(\frac{1}{2}\, w_1\, T\right)}{w_1} \\ -1.\ \sin\left(\frac{1}{2}\, w_1\, T\right) w_1 & 1.\ \cos\left(\frac{1}{2}\, w_1\, T\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
> X(t):=evalm(1/Wr1*Wr(t)&*B[3](t));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} 1.\cos(w_1\,t) & \dfrac{1.\sin(w_1\,t)}{w_1} \\ -1.\sin(w_1\,t)\,w_1 & 1.\cos(w_1\,t) \end{bmatrix}$$

```
> X(T/2):=subs(t=T/2, X(t));
```

$$X\left(\frac{T}{2}\right) := \begin{bmatrix} 1.\cos\left(\frac{1}{2}\,w_1\,T\right) & \dfrac{1.\sin\left(\frac{1}{2}\,w_1\,T\right)}{w_1} \\ -1.\sin\left(\frac{1}{2}\,w_1\,T\right)w_1 & 1.\cos\left(\frac{1}{2}\,w_1\,T\right) \end{bmatrix}$$

Pada selang $\frac{T}{2} \le t \le T$.

```
> A2:=Diff(y(t),t,t)+h[2]*y(t)=0;
```

$$A2 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)\right) + h_2\,y(t) = 0$$

```
> sol2:=dsolve(A2,y(t));
```

$$sol2 := y(t) = \_C1\,\sin(\sqrt{h_2}\,t) + \_C2\,\cos(\sqrt{h_2}\,t)$$

Tulis $w_2 = \sqrt{h_2}$.

```
> y1:=sin(w[2]*t);y2:=cos(w[2]*t);
```

$$y1 := \sin(w_2\,t)$$

$$y2 := \cos(w_2\,t)$$

```
> B(t):=vector([y1,y2]);B[1](t):=matrix(2,1,[C1,C2]);
```

$$B(t) := [\sin(w_2\,t), \cos(w_2\,t)]$$

$$B_1(t) := \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

```
> Wr(t):=wronskian(B(t),t);
```

$$\mathrm{Wr}(t) := \begin{bmatrix} \sin(w_2 t) & \cos(w_2 t) \\ \cos(w_2 t)\, w_2 & -\sin(w_2 t)\, w_2 \end{bmatrix}$$

```
> Wr1:=det(Wr(t));
```

$$Wr1 := -\sin(w_2\, t)^2\, w_2 - \cos(w_2\, t)^2\, w_2$$

```
> Wr1:=simplify(Wr1);
```

$$Wr1 := -w_2$$

```
> Y(t):=Wr(t)*B[1](t);
```

$$\mathrm{Y}(t) := \begin{bmatrix} \sin(w_2\, t) & \cos(w_2\, t) \\ \cos(w_2\, t)\, w_2 & -\sin(w_2\, t)\, w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

```
> B[2](t):=adj(Wr(t));
```

$$B_2(t) := \begin{bmatrix} -\sin(w_2\, t)\, w_2 & -\cos(w_2\, t) \\ -\cos(w_2\, t)\, w_2 & \sin(w_2\, t) \end{bmatrix}$$

```
> B[3](t):=evalf(subs(t=0, adj(Wr(t))));
```

$$B_3(t) := \begin{bmatrix} \text{-0.} & \text{-1.} \\ -1.\, w_2 & 0. \end{bmatrix}$$

```
> Y(0):=matrix(2,1,[y,v](0));
```

$$\mathrm{Y}(0) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> B[1](t):=1/Wr1&*(B[3](t)*Y(0));
```

$$B_1(t) := \left(-\frac{1}{w_2}\right) \&* \begin{bmatrix} \text{-0.} & \text{-1.} \\ -1.\, w_2 & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(t):=1/Wr1&*(Wr(t)*B[3](t)*Y(0));
```

$$\mathrm{Y}(t) := \left(-\frac{1}{w_2}\right) \&* \begin{bmatrix} \sin(w_2\, t) & \cos(w_2\, t) \\ \cos(w_2\, t)\, w_2 & -\sin(w_2\, t)\, w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{-0.} & \text{-1.} \\ -1.\, w_2 & 0. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(t):=evalm(1/Wr1*Wr(t)&*B[3](t))*Y(0);
```

$$\mathrm{Y}(t) := \begin{bmatrix} 1.\cos(w_2\,t) & \dfrac{1.\sin(w_2\,t)}{w_2} \\ -1.\sin(w_2\,t)\,w_2 & 1.\cos(w_2\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(T/2):=matrix(2,1,[y,v](T/2));
```

$$\mathrm{Y}\left(\frac{T}{2}\right) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}\left(\dfrac{T}{2}\right) \\ \mathrm{v}\left(\dfrac{T}{2}\right) \end{bmatrix}$$

```
> Y(T/2):=subs(t=T/2, Y(t));
```

$$\mathrm{Y}\left(\frac{T}{2}\right) := \begin{bmatrix} 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right) & \dfrac{1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right)}{w_2} \\ -1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right)w_2 & 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(T):=matrix(2,1,[y,v](T));
```

$$\mathrm{Y}(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(T) \\ \mathrm{v}(T) \end{bmatrix}$$

Jelas nilai y dan v pada $t = \dfrac{T}{2}$ adalah nilai-nilai awal dalam selang berikutnya

$\dfrac{T}{2} \le t \le T$, maka diperoleh

```
> Y(T):=X(T/2)*Y(T/2);
```

$$\mathrm{Y}(T) :=$$

$$\begin{bmatrix} 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_1\,T\right) & \dfrac{1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_1\,T\right)}{w_1} \\ -1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_1\,T\right)w_1 & 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_1\,T\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right) & \dfrac{1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right)}{w_2} \\ -1.\sin\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right)w_2 & 1.\cos\left(\dfrac{1}{2}w_2\,T\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
>
Y(T):=subs(1/2*w[1]*T=(theta)[1],1/2*w[2]*T=(theta)[2
], Y(T));
```

$$Y(T) := \begin{bmatrix} 1.\cos(\theta_1) & \frac{1.\sin(\theta_1)}{w_1} \\ -1.\sin(\theta_1)\,w_1 & 1.\cos(\theta_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.\cos(\theta_2) & \frac{1.\sin(\theta_2)}{w_2} \\ -1.\sin(\theta_2)\,w_2 & 1.\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
>Y(T):=subs(cos((theta)[1])=K[1],cos((theta)[2])=K[2]
,sin((theta)[1])=L[1],sin((theta)[2])=L[2], Y(T));
```

$$Y(T) := \begin{bmatrix} 1.\,K_1 & \frac{1.\,L_1}{w_1} \\ -1.\,L_1\,w_1 & 1.\,K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.\,K_2 & \frac{1.\,L_2}{w_2} \\ -1.\,L_2\,w_2 & 1.\,K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
>P(t):=evalm(matrix(2,2,[K[1],L[1]/w[1],-
1*L[1]*w[1],K[1]])&*     matrix(2,2,[K[2],L[2]/w[2],-
1*L[2]*w[2],K[2]]));
```

$$P(t) := \begin{bmatrix} K_1\,K_2 - \frac{L_1\,L_2\,w_2}{w_1} & \frac{K_1\,L_2}{w_2} + \frac{L_1\,K_2}{w_1} \\ -L_1\,w_1\,K_2 - K_1\,L_2\,w_2 & -\frac{L_1\,w_1\,L_2}{w_2} + K_1\,K_2 \end{bmatrix}$$

```
> Y(T):=P(t)*Y(0);
```

$$Y(T) := \begin{bmatrix} K_1\,K_2 - \frac{L_1\,L_2\,w_2}{w_1} & \frac{K_1\,L_2}{w_2} + \frac{L_1\,K_2}{w_1} \\ -L_1\,w_1\,K_2 - K_1\,L_2\,w_2 & -\frac{L_1\,w_1\,L_2}{w_2} + K_1\,K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$$

```
> M:=matrix(2,2,[D,E,F,G])=P(t);
```

$$M := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 K_2 - \dfrac{L_1 L_2 w_2}{w_1} & \dfrac{K_1 L_2}{w_2} + \dfrac{L_1 K_2}{w_1} \\ -L_1 w_1 K_2 - K_1 L_2 w_2 & -\dfrac{L_1 w_1 L_2}{w_2} + K_1 K_2 \end{bmatrix}$$

```
> Y(T):=matrix(2,2,[D,E,F,G])*Y(0);
```

$$\mathrm{Y}(T) := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

```
> Y(n*T):=matrix(2,1,[y,v](2*T));
```

$$\mathrm{Y}(n\,T) := \begin{bmatrix} \mathrm{y}(2\,T) \\ \mathrm{v}(2\,T) \end{bmatrix}$$

Jadi nilai y dan v pada akhir periode penuh riak persegi panjang Gb.3 diberikan oleh

```
> Y(n*T):=matrix(2,2,[D,E,F,G])^n*Y(0);
```

$$\mathrm{Y}(n\,T) := \begin{bmatrix} \mathrm{D} & E \\ F & G \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} \mathrm{y}(0) \\ \mathrm{v}(0) \end{bmatrix}$$

Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode matriks di dalam *Maple*, pada persamaan getaran takteredam bebas.

Suatu benda dengan berat W = *8 lb* merenggangkan pegas sejauh 6 inci = $\frac{1}{2}$ ft. Berdasarkan hukum Hooke's diperoleh nilai k sebesar $8 = k\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 16$. Dan $m = \frac{w}{g} = \frac{8}{32}$, sehingga dapat diturunkan dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut : $\frac{8}{32}\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$, dengan $y(0) = \frac{1}{4}$, $y^1(0) = 1$. Persamaan tersebut akan diselesaikan menggunakan metode matriks dalam program *Maple*.

```
> restart;
> with(ODEtools):
```

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> A:=8/32*diff(y(t),t,t)+16*y(t)=0;
```

$$A := \frac{1}{4}\left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + 16\,\mathrm{y}(t) = 0$$

```
> A:=diff(y(t),t,t)+64*y(t)=0;
```

$$A := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{y}(t)\right) + 64\,\mathrm{y}(t) = 0$$

```
> sol1:=dsolve(A,y(t));
```

$$sol1 := \mathrm{y}(t) = \_C1\,\sin(8\,t) + \_C2\,\cos(8\,t)$$

```
> y[1]:=sin(8*t);y[2]:=cos(8*t);
```

$$y_1 := \sin(8\,t)$$

$$y_2 := \cos(8\,t)$$

```
> B(t):=vector([y[1],y[2]]);X(t):=matrix(2,1,[C1,C2]);
```

$$\mathrm{B}(t) := [\sin(8\,t), \cos(8\,t)]$$

$$\mathrm{X}(t) := \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

```
> Wr(t):=wronskian(B(t),t);
```

$$\mathrm{Wr}(t) := \begin{bmatrix} \sin(8\,t) & \cos(8\,t) \\ 8\cos(8\,t) & -8\sin(8\,t) \end{bmatrix}$$

```
> W:=det(Wr(t));
```

$$W := -8\sin(8t)^2 - 8\cos(8t)^2$$

```
> W:=simplify(W);
```

$$W := -8$$

```
> adj(Wr(t));
```

$$\begin{bmatrix} -8\sin(8t) & -\cos(8t) \\ -8\cos(8t) & \sin(8t) \end{bmatrix}$$

```
> H(t):=1/W*adj(Wr(t));
```

$$H(t) := -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -8\sin(8t) & -\cos(8t) \\ -8\cos(8t) & \sin(8t) \end{bmatrix}$$

```
> H[1](t):=evalm(-1/8*adj(Wr(t)));
```

$$H_1(t) := \begin{bmatrix} \sin(8t) & \frac{1}{8}\cos(8t) \\ \cos(8t) & -\frac{1}{8}\sin(8t) \end{bmatrix}$$

```
> H[1](0):=evalf(subs(t=0, H[1](t)));
```

$$H_1(0) := \begin{bmatrix} 0. & 0.1250000000 \\ 1. & -0. \end{bmatrix}$$

Dipunyai $y(0) = \frac{1}{4},\ y^1(0) = 1$.

```
> Y(0):=matrix(2,1,[1/4,1]);
```

$$Y(0) := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> X(t):=evalm(H[1](0)&*Y(0));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} 0.1250000000 \\ 0.2500000000 \end{bmatrix}$$

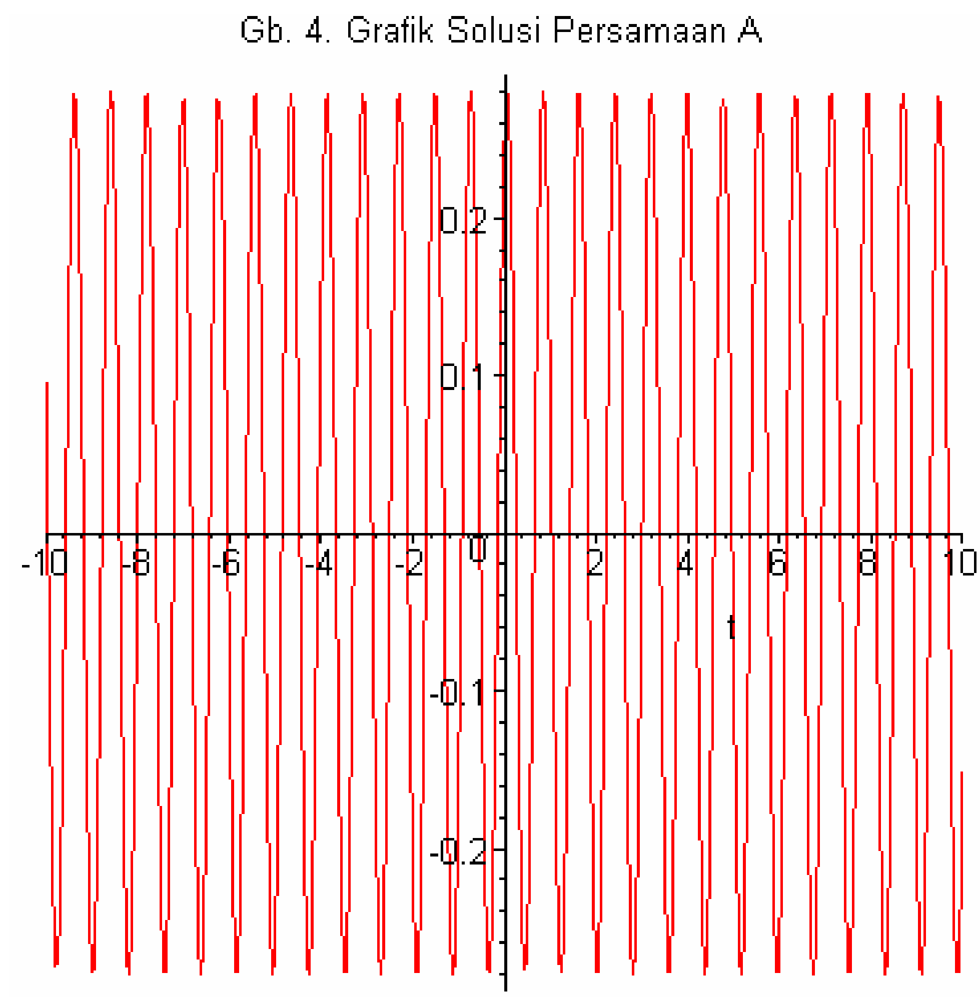
```
> Y(t):=matrix(2,1,[y,v])=evalm(Wr(t)&*X(t));
```

$$Y(t) := \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1250000000\ \sin(8\,t) + 0.2500000000\ \cos(8\,t) \\ 1.000000000\ \cos(8\,t) - 2.000000000\ \sin(8\,t) \end{bmatrix}$$

```
> n(t):=1/8*sin(8*t)+1/4*cos(8*t);
```

$$n(t) := \frac{1}{8}\sin(8\,t) + \frac{1}{4}\cos(8\,t)$$

```
> plot(n(t), t=-10..10, title="Gb. 4. Grafik Solusi Persamaan A");
```



BAB V

PENUTUP

SIMPULAN

Dari hasil pembahasan pada penelitian ini, simpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

Bentuk persamaan Hill adalah $\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0$. Dengan menggunakan metode matriks dipeoleh penyelesaian persamaan diferensial Hill pada sembarang waktu $t > 0$ yang dinyatakan dalam nilai-nilai awal untuk $y(t)$ dan $\dot{y}(t) = v(t)$ dengan dua penyelesaian bebas linier adalah sebagai berikut.

Pada saat $t = 0$,

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dot{u}_1(t) & \dot{u}_2(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Pada saat $t = T$,

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Pada akhir periode kedua dari perubahan $F(t)$,

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{2T} = \left(\frac{1}{|W_0|}\begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix}\right)^2\begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Pada akhir periode ke-n dari perubahan $F(t)$,

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \left(\frac{1}{|W_0|} \begin{bmatrix} u_1(T) & u_2(T) \\ \dot{u}_1(T) & \dot{u}_2(T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

Pada akhir periode ke-***(n+1)*** dari perubahan *F(t)*,

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT+\tau} = \begin{bmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ \dot{u}_1(\tau) & \dot{u}_2(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_2(0) & -u_2(0) \\ -\dot{u}_1(0) & u_1(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT}.$$

Penginterpretasian hasil *output* dari program *Maple* identik dengan interpretasi hasil penyelesaian secara manual. Namun perhitungan menggunakan program *Maple* lebih akurat dibandingkan secara manual. Selain itu, dengan program *Maple* akan lebih cepat menentukan solusi matematisnya.

SARAN

Dari simpulan di atas, saran yang dapat penulis berikan adalah sebagai berikut:

Perlu diadakan penelitian lebih lanjut pada penyelesaian persamaan diferensial Hill dengan masalah nilai batas.

Semakin berkembang IPTEK, menuntut kita untuk terus bereksplorasi dan berinovasi dengan konsep matematika yang dimiliki dan fasilitas yang ada, seperti memanfaatkan *software-software* matematika untuk memecahkan persoalan matematis.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer*, Alih bahasa Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Arnold, Vladimir I. 1973. *Ordinary Differential Equations*. USA: Halliday Lithograph Corp.

Grimshaw, R. 1990. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. London: Blackwell Scientific Publications.

Kartono. 2001. *Maple untuk Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: J & J Learning.

Pipes, Louis A. 1991. *Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press.

Rochmad. 2002. *Persamaan Diferensial Biasa*. Semarang: Jurusan Matematika FMIPA UNNES.

Ross, Shepley L. 1989. *Differential Equations.* Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

Verhulst, Ferdinand. 1996. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Spriger.